目录

第一章 再论实数系 **3**

1.1 实数连续性的等价描述 . . . 3

1.2 实数闭区间的紧致性 . . . 5

1.3 实数的完备性 . . . 8

1.3.1 七个命题的等价性 . . . 8

1.3.2 基于等价类的实数理论 . . . 11

1.3.3 习题 . . . 11

1.4 再论闭区间上的连续函数的性质 . . . 13

1.5 可积性 . . . 15

第二章 数项级数 **19**

2.1 数项级数的收敛性及其基本性质 . . . 19

2.2 正项级数 . . . 20

2.3 一般项级数 . . . 22

2.4 无穷级数与代数运算 . . . 23

第三章 广义积分 **27**

3.1 无穷限广义积分 . . . 27

3.2 瑕积分 . . . 29

3.3 补充材料 . . . 31

3.3.1 Dirichlet判别法的必要性 . . . 31

第四章 **33**

4.1 函数序列的一致收敛概念 . . . 33

4.2 函数项级数的一致收敛性及其判别法 . . . 35

4.3 和函数的分析性质 . . . 38

第五章 幂级数 **41**
5.1 幂级数的收敛半径与收敛区域 41
5.2 幂级数的性质 41
5.3 函数的幂级数展开 42

第六章 傅里叶级数 **43**
6.1 三角级数与傅里叶级数 43
6.2 傅里叶级数的收敛性 43
6.3 任意区间上的傅里叶级数 45
6.4 傅里叶级数的平均收敛性 45

第七章 多元函数的极限与连续性 **47**

第一章　再论实数系

1.1　实数连续性的等价描述

习题1.1.1. 设$f(x)$在D上定义，求证：

(1) $\sup_{x\in D}\{-f(x)\} = -\inf_{x\in D} f(x)$;

(2) $\inf_{x\in D}\{-f(x)\} = -\sup_{x\in D} f(x)$.

证明. 我们来证明(1)，(2)的证明是类似的. 如果$\sup_{x\in D}\{-f(x)\} = \beta$，则

- $-f(x) \leq \beta$，于是$f(x) \geq -\beta$ 从而$\inf_{x\in D} f(x) \geq -\beta$;
- 对于任意ϵ，存在x，使得$-f(x) \geq \beta - \epsilon$，于是$f(x) \leq -\beta + \epsilon$，从而我们有$\inf_{x\in D} f(x) \leq -\beta + \epsilon$.

综上所述，我们知$-\inf_{x\in D} f(x) = \beta$，即为所求. □

习题1.1.2. 设$\beta = \sup E$，且$\beta \notin E$，试证自E中可选取数列$\{x_n\}$ 且x_n 互不相同，使$\lim_{n\to\infty} x_n = \beta$；又若$\beta \in E$，则情形如何？

证明. 由$\beta = \sup E$，且$\beta \notin E$，我们有

(1) $\forall x \in E$，有$x < \beta$；

(2) $\forall \epsilon > 0$，$\exists x_\epsilon \in E$，使$x_\epsilon > \beta - \epsilon$.

取$\epsilon_1 = 1$，则$\exists x_1 \in E$，使$\beta - 1 < x_1 < \beta$；$\epsilon_2 = \min\{\frac{1}{2},\ \beta - x_1\}$，则由(2)我们知$\exists x_2 \in E$，使$\beta - \epsilon_2 < x_2 < \beta; \cdots$ 如此下去，便得到一数列$\{x_n\}$满足$x_n \in E$，$\beta - \frac{1}{n} < x_n < \beta$, $x_{n-1} < x_n < \beta$, $n = 1, 2, \cdots$. 从而$\lim_{n\to\infty} x_n = \beta$.

如果$\beta \in E$，则上述结果可能不成立. 我们有如下的例子：如$E_1 = [1, 2]$，则$\beta = \sup E = 2 \in E_1$. 我们取$x_n = 2 - \frac{1}{n} \in [1, 2]$，则有各$x_n$互不相同且$\lim_{n\to\infty} x_n = 2 = \beta$. 如$E_2$=1,2，则$\beta = \sup E = 2 \in E_2$，但我们找不到满足上述要求的序列$\{x_n\}$. □

习题1.1.3. 试证收敛数列必有上确界和下确界，趋于$+\infty$的数列必有下确界，趋于$-\infty$的数列必有上确界.

证明. 设数列$\{x_n\}$收敛，则知其有界，由确界存在原理知，该数列必有上、下确界.

若$x_n \to \infty(n \to +\infty)$，则$\exists N \in \mathbb{N}$，当$n > N$时，有$x_n > 1$. 令$m = \min\{x_1, x_2, \cdots, x_N, 1\}$，则$x_n \geq m$ 对任意n成立，从而$\{x_n\}$有下界，故其有下确界. 类似可证趋于$-\infty$的数列必有上确界. □

习题1.1.4. 试分别举出满足下列条件的数列：

(1) 有上确界无下确界的数列；

(2) 含有上确界不含有下确界的数列；

(3) 既含有上确界又含有下确界的数列；

(4) 既不含有上确界又不含有下确界的数列，其中上、下确界都有限.

解. (1) $\{x_n\} = \{-n\} : -1, -2, -3, \cdots, -n, \cdots$;

(2) $\{x_n\} = \{\frac{1}{n}\} : 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$;

(3) $\{x_n\} : 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$;

(4) $1, 2-1, \frac{1}{2}, 2-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 2-\frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, 2-\frac{1}{n}, \cdots$.

□

习题1.1.5. 设$f(x)$在$[a,b]$上有界，定义$\omega_f[a,b] = \sup_{x\in[a,b]} f(x) - \inf_{x\in[a,b]} f(x)$，求证：

$$\omega_f[a,b] = \sup_{x'\in[a,b],x''\in[a,b]} |f(x') - f(x'')|.$$

证明. 首先，我们有

$$\inf_{x\in[a,b]} f(x) - \sup_{x\in[a,b]} f(x) \leq f(x') - f(x'') \leq \sup_{x\in[a,b]} f(x) - \inf_{x\in[a,b]} f(x),$$

从而有

$$|f(x') - f(x'')| \leq \sup_{x\in[a,b]} f(x) - \inf_{x\in[a,b]} f(x) = \omega_f[a,b],$$

于是我们有

$$\sup_{x'\in[a,b],x''\in[a,b]} |f(x') - f(x'')| \leq \omega_f[a,b].$$

反过来，记$A=\sup_{x\in[a,b]}f(x)$，$B=\inf_{x\in[a,b]}f(x)$，则$\exists x',x''$满足：

$$f(x')\geq A-\epsilon,\ f(x'')\leq B+\epsilon,$$

从而

$$A-B-2\epsilon\leq f(x')-f(x''),$$

于是，我们有

$$A-B-2\epsilon\leq\sup_{x'\in[a,b],x''\in[a,b]}|f(x')-f(x'')|.$$

由ϵ 的任意性，有$\sup_{x'\in[a,b],x''\in[a,b]}|f(x')-f(x'')|\geq\omega_f[a,b]$.

综上所述，我们有$\omega_f[a,b]=\sup_{x'\in[a,b],x''\in[a,b]}|f(x')-f(x'')|$. □

习题1.1.6. 设$f(x)$在x_0附近定义且有界，定义

$$\omega_f(x_0)=\lim_{n\to+\infty}\omega_f(x_0-\frac{1}{n},x_0+\frac{1}{n}),$$

求证：$f(x)$在x_0 连续的充分必要条件为$\omega_f(x_0)=0$.

证明. 先证必要性. 设f在点x_0处连续. 对任给的$\epsilon>0$，当n充分大时，可使得当$y\in O(x,\dfrac{1}{n})$时便有

$$|f(y)-f(x)|<\frac{\epsilon}{2}.$$

所以，当$y_1,y_2\in O(x_0,\dfrac{1}{n})$时，

$$|f(y_1)-f(y_2)|\leq|f(y_1)-f(x)|+|f(x)-f(y_2)|<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon.$$

由此立得$\omega_f(x_0-\dfrac{1}{n},x_0+\dfrac{1}{n})\leq\epsilon$. 令$n\to+\infty$，得出$0\leq\omega_f(x_0)\leq\epsilon$. 由$\epsilon$的任意性，我们有$\omega_f(x_0)=0$.

再证充分性. 设$\omega_f(x_0)=0$. 于是对任意$\epsilon>0$，存在$n>0$，使得$\omega_f(x_0-\dfrac{1}{n},x_0+\dfrac{1}{n})<\epsilon$. 因此，对于任何$y\in O(x_0,\dfrac{1}{n})$，必有

$$|f(x_0)-f(y)|\leq\omega_f(x_0-\frac{1}{n},x_0+\frac{1}{n})<\epsilon.$$

这表明函数f在点x_0处连续. □

1.2 实数闭区间的紧致性

习题1.2.1. 利用紧致性定理证明单调有界数列必有极限.

证明. 不妨设$\{x_n\}$为单调递增的有界数列，由紧致性定理知其必有一收敛子列$\{x_{n_k}\}$，设其极限为a，于是存在$K>0$ 使得当$k>K$ 时，$0\le a-x_{n_k}\le\epsilon$. 于是当$n\ge n_k$ 时，$0\le a-x_{n_k}\le a-x_n\le\epsilon$. 从而$\lim_{n\to\infty}x_n=a$. □

习题1.2.2. 用区间套定理证明单调有界数列必有极限.

证明. 不妨设$\{x_n\}$为单调递增的有界数列，则$\exists a_1$, b_1 使得$a_1\le x_n\le b_1$, $n=1,2,\cdots$. 我们将区间$[a_1,b_1]$二等分. 若$\frac{a_1+b_1}{2}$是$\{x_n\}$的上界，则对任意n，有$x_n\le\frac{a_1+b_1}{2}$，则记$a_2=a_1$, $b_2=\frac{a_1+b_1}{2}$；若不然，则存在正整数N，使得当$n\ge N$ 时有$x_n>\frac{a_1+b_1}{2}$，则记$a_2=\frac{a_1+b_1}{2}$, $b_2=b_1$.

由我们前述的构造，可知$[a_2,b_2]$中含有$\{x_n\}$第N项之后的所有项. 依次继续做下去，可得到一闭区间套$\{[a_n,b_n]\}$，在每个区间$[a_n,b_n]$中含有$\{x_n\}$的某项之后所有的项.

由闭区间套定理，存在唯一实数$r\in\cap_{i=1}^{\infty}[a_n,b_n]$，且$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=r$. 所以$\forall\epsilon>0,\exists n_0$，使得$[a_{n_0},b_{n_0}]\subset(r-\epsilon,r+\epsilon)$. 又$[a_{n_0},b_{n_0}]$包含$\{x_n\}$的某项以后的所有的项. 于是$\exists N\in\mathbb{N}^+$，当$n>N$时，$x_n\in[a_{n_0},b_{n_0}]\subset(r-\epsilon,r+\epsilon)$，所以$\lim_{n\to\infty}x_n=r$. □

习题1.2.3. 求证数列$\{a_n\}$有界的充要条件是，$\{a_n\}$的任何子数列$\{a_{n_k}\}$都有收敛的子数列.

证明. 充分性. 因$\{a_n\}$有界，故它的任意子列$\{a_{n_k}\}$也有界. 根据紧致性定理知，$\{a_{n_k}\}$必有收敛的子数列.

必要性. 用反证法. 若$\{a_n\}$无界，则其存在子列$\{x_{n_k}\}:x_{n_k}\to\infty(k\to\infty)$. 于是$\{x_{n_k}\}$没有收敛的子数列. 矛盾. □

习题1.2.4. 设$f(x)$ 在$[a,b]$ 上定义，且在每一点处函数的极限存在，求证：$f(x)$ 在$[a,b]$ 上有界.

证明. 对于$\forall x_0\in[a,b]$，极限$\lim_{x\to x_0}f(x)$ 存在（若$x_0=a$ 或b，则考虑其右极限和左极限），于是存在$\delta_0>0$，$M_0>0$，$\forall x\in(x_0-\delta_0,x_0+\delta_0)\cap[a,b]$，$f(x)|\le M_0$. 构造开区间族

$$E=\{(x-\delta_x,x+\delta_x)|x\in[a,b]\},$$

则E 为$[a,b]$ 的一个覆盖. 由有限覆盖定理知，可以从E 中选择有限个开区间，覆盖$[a,b]$，记为

$$(x_1-\delta_1,x_1+\delta_1),(x_2-\delta_2,x_2+\delta_2),\cdots,(x_k-\delta_k,x_k+\delta_k).$$

又当$x\in(x_i-\delta_i,x_i+\delta_i)\cap[a,b]$ 时，有$|f(x)|\le M_i$，$i=1,2,\cdots,k$. 取$M=\max_{1\le i\le k}|M_i|$，则$x\in[a,b]$，$|f(x)|\le M$. 故$f(x)$ 在$[a,b]$ 有界. □

习题1.2.5. 设$f(x)$在$[a,b]$无界，求证存在$c \in [a,b]$，对任给$\delta > 0$，函数$f(x)$在$(c-\delta, c+\delta) \cap [a,b]$上无界.

证明. 用反证法. 设函数$f(x)$在$[a,b]$上处处局部有界，即$\forall x \in [a,b]$，$\exists \delta_x > 0$以及常数$M_x > 0$，使得$|f(t)| \leq M_x$对任意$t \in O(x, \delta_x) \cap [a,b]$. 从而得到了闭区间$[a,b]$的一个开覆盖$E = \{O(x,\delta_x) | x \in [a,b]\}$. 由有限覆盖定理，存在$E$的有限子覆盖，记为$O_1(x_1,\delta_1), O_2(x_2,\delta_2), \cdots, O_k(x_k,\delta_k)$. 取$M = \{M_{x_1}, M_{x_2}, \cdots, M_{x_k}\}$. 由于$[a,b] \subset \cup_{i=1}^k O_i(x_i,\delta_i)$，故对任意$x \in [a,b]$，有$|f(x) < M$，即$f(x)$在$[a,b]$上有界，矛盾. □

习题1.2.6. 设$f(x)$ 在$[0,\infty)$ 上连续且有界，对任意$a \in (-\infty,+\infty)$，$f(x) = a$ 在$[0,+\infty)$ 上只有有限个根或无根，求证：$\lim_{x\to+\infty} f(x)$ 存在.

证明. 因为$f(x)$ 在$[0,\infty)$ 上有界，我们知存在m, M 使得对任意$x \in [0,\infty)$，有$m < f(x) < M$. 记$[a_1,b_1] = [m,M]$. 将$[m,M]$ 二等分，则存在$X_1 > 0$，当$x > X_1$ 时，$f(x)$ 必完全位于$[m_1, \frac{m_1+M_1}{2}]$ 和$[\frac{m_1+M_1}{2}, M_1]$ 之一. 否则由f的连续性和介值定理，$f(x) = \frac{m_1+M_1}{2}$ 在$[0,+\infty)$ 上有无限个实数，矛盾. 记此区间为$[m_2,M_2]$. 依次下去，得到区间套$\{[m_n,M_n]\}$，对其中每一个区间$[m_n,M_n]$，$\exists X_n > 0$，当$x > X_n$，$f(x)$ 必完全位于$[m_n,M_n]$ 内。由区间套定理，$\exists \xi \in \cap_{n=1}^\infty [m_n,M_n]$，且$\lim_{n\to\infty} m_n = \lim_{n\to\infty} M_n = \xi$，$\forall \epsilon > 0$. 于是$\exists N \in \mathbb{N}^+$，使得$|M_n - m_n| < \epsilon$. 从而当$x > X_n$ 时，$|f(x) - \xi| \leq |M_n - m_n| < \epsilon$，即$\lim_{x\to+\infty} f(x)$ 存在. □

习题1.2.7. 设开区间族$\{I_\lambda\}$是有限闭区间$[a,b]$的一个开覆盖，则必存在$\sigma > 0$，使得只要区间$A \subset [a,b]$且A的长度$|A| < \sigma$时，必有$\{I_\lambda\}$中的一个区间包含A. σ 称为这个开覆盖的Lebesgue数.

证明. 反证法. 如果不存在这样的$\sigma > 0$，则存在区间$E_i \subset [a,b]$，虽然满足$|E| < \frac{1}{i}$，但E_i 不能被$\{I_\lambda\}$ 中任一区间所包含. 从每个E_i 中取定一点x_i，得一数列$\{x_i\}$，因为$\{x_i\} \subset [a,b]$，故能取出收敛的子列$\{x_{k_i}\}$，它的极限x 仍在$[a,b]$ 中，因而存在开区间$I \in \{I_\lambda\}$，使得$x \in I$，故有$\epsilon > 0$，使得$(x-\epsilon, x+\epsilon) \subset I$. 取$i$ 充分大，使得$i > \frac{2}{\epsilon}$，并且$x_{k_i} \in (x - \frac{\epsilon}{2}, x + \frac{\epsilon}{2})$. 于是$|E_{k_i}| < \frac{1}{k_i} < \frac{1}{i} < \frac{\epsilon}{2}$，对任一$y \in E_{k_i}$ 我们有

$$|x-y| \leq |x - x_{k_i}| + |x_{k_i} - y| < \tfrac{\epsilon}{2} + |E_{k_i}| < \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

从而$E_{k_i} \subset (x-\epsilon, x+\epsilon) \subset I$，这是矛盾. □

习题1.2.8. 利用上述习题证明有限覆盖定理.

1.3 实数的完备性

1.3.1 七个命题的等价性

定理1.3.1 (确界定理). *在实数系$\mathbb{R}$ 内，非空的有上（下）界的数集必有上（下）确界存在.*

定理1.3.2 (单调有界原理). *单调上升有上界的实数列必有极限存在.*

定理1.3.3 (紧致性定理). *有界数列必有收敛子列.*

定理1.3.4 (柯西收敛原理). *实数数列收敛的充分必要条件是其为一个基本列.*

注意，该定理的必要性，由绝对值的三角不等式可以直接推出. 反映实数连续性，与其他定理等价的，只是此定理的充分性：实数基本列必有极限.

定理1.3.5 (聚点原理). *任何有界无穷集，至少有一个聚点.*

定理1.3.6 (区间套定理). *任何闭区间套，必存在唯一的公共点.*

定理1.3.7 (有限覆盖定理). *实数闭区间上的任一开覆盖，必有有限子覆盖.*

前六个定理属于同一类型，它们都指出，在某一条件下，便有某种“点”存在. 而有限覆盖定理属于另一种类型，它是前六个定理的逆否形式，它与前六个定理的互推可以利用反证法来完成.

区间套定理推确界定理. 设M 为集合E 的上界. 若E 有最大值，则其即为E 的上确界. 现设E 无最大值. 任取一$x_0 \in E$，将$[x_0, M]$ 二等分，若右半区间含有E 中的点，则记右半区间为$[a_1, b_1]$，否则记左半区间为$[a_1, b_1]$. 然后将$[a_1, b_1]$ 再二等分，用同样的方法选$[a_2, b_2]$，如此无限下去，我们便得到了一个区间套$\{[a_n, b_n]\}$，$a_n \nearrow$，$b_n \searrow$，$b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(M - x_0) \to 0$（当$n \to \infty$时）.由区间套定理，可知存在唯一公共点$\xi \in [a_n, b_n](n = 1, 2, \ldots)$. 不难证明$\xi$ 正是E 的上确界. □

区间套定理推单调有界原理. 不妨设$\{x_n\}$为单调递增的有界数列，则$\exists a_1, b_1$使得$a_1 \le x_n \le b_1, n = 1, 2, \cdots$. 我们将区间$[a_1, b_1]$二等分. 若$\frac{a_1+b_1}{2}$是$\{x_n\}$的上界，则对任意$n$，有$x_n \le \frac{a_1+b_1}{2}$，则记$a_2 = a_1$, $b_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$；若不然，则存在正整数N，使得当$n \ge N$ 时有$x_n > \frac{a_1+b_1}{2}$，则记$a_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$, $b_2 = b_1$.

由我们前述的构造，可知$[a_2, b_2]$中含有$\{x_n\}$第N项之后的所有项. 依次继续做下去，可得到一闭区间套$\{[a_n, b_n]\}$，在每个区间$[a_n, b_n]$中含有$\{x_n\}$的某项之后所有的项.

由区间套定理，存在唯一实数$r \in \cap_{i=1}^{\infty}[a_n, b_n]$，满足$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = r$. 所以$\forall\epsilon > 0, \exists n_0$，使得$[a_{n_0}, b_{n_0}] \subset (r-\epsilon, r+\epsilon)$. 又$[a_{n_0}, b_{n_0}]$包含$\{x_n\}$的某项以后的所有的项. 于是$\exists N \in \mathbb{N}^+$，当$n > N$时，$x_n \in [a_{n_0}, b_{n_0}] \subset (r-\epsilon, r+\epsilon)$，所以$\lim_{n\to\infty} x_n = r$. □

区间套定理推柯西收敛原理的充分性. 首先注意到基本列必有界$m \le x_n \le M(n = 1, 2, \ldots)$. 然后对$[m, M]$ 作二等分，选含$\{x_n\}$ 中无穷多项的那一“半区间”作为$[a_1, b_1]$. 如此剖分下去，我们可以得到闭区间套$[a_n, b_n]$，由闭区间套定理知其有唯一的公共点ξ. 不难证明$\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$. □

区间套定理推紧致性定理. 方法同上，这时ξ的任一邻域包含$\{x_n\}$中的无穷多项，因而可知$\{x_n\}$至少有一个子序列以ξ为极限. □

区间套定理推聚点定理. 留作思考. □

确界定理推区间套定理. 设$\{[a_n, b_n]\}$ 为区间套（即$a_n \nearrow, b_n \searrow, 0 \le b_n - a_n \to 0$）. 令$E = \{a_n\}$，因它有上界$b_1$，故由确界定理知其有上确界$\xi$. 类似地，我们有$b_n$ 有下确界η. 由$0 \le b_n - a_n \to 0$ 可知$\xi = \eta$. 不难看出这是$[a_n, b_n]$唯一的公共点. □

单调有界原理推区间套定理. 由于$\{a_n\}$ 单调有界，故极限存在，记为ξ. 不难验证ξ 是$[a_n, b_n]$唯一的公共点. □

柯西收敛原理的充分性推区间套定理. 可以证明$\{a_n\}$ 是一个基本列，故极限存在，记为ξ. 不难验证ξ 是$[a_n, b_n]$唯一的公共点. □

紧致性定理推区间套定理. 由于$\{a_n\}$ 有界，故存在收敛子列，其极限记为ξ. 不难验证ξ 是$[a_n, b_n]$唯一的公共点. □

聚点定理推区间套定理. 由于$\{a_n\} \cup \{b_n\}$ 有界，故存在聚点，记为ξ. 不难验证ξ 是$[a_n, b_n]$唯一的公共点. □

确界定理推单调有界原理. 设$x_n \nearrow$ 有上界M，取集合$E = \{x_n\}$，则E 非空，从而由确界原理其有上确界

$$\xi = \sup x_n \in \mathbb{R}.$$

不难证明$x_n \to \xi (n \to \infty$时$)$. □

其它的关于确界定理，单调有界原理，柯西收敛原理的充分性，紧致性定理，聚点原理这几个之间的互推都可以利用二分法，具体留作思考.

有限覆盖定理推确界定理. 设$\emptyset \neq E \subset \mathbb{R}$，对$\forall x \in E$ 有$x \leq M$. 任取一点$x_0 \in E$，考虑闭区间$[x_0, M]$，假若E 无上确界，那么对任意$x \in [x_0, M)$:

1. 当x 为E 的上界时，必有更小的上界$x_1 < x$，因而x 有一个开邻域Δ_x，其中元素皆为E 的上界；

2. 当x 不是E 的上界时，必有E 中的点$x_2 > x$，于是x 有一个开邻域Δ_x，其中元素皆不为E 的上界.

$[x_0, M]$ 上每点都可以找出一个邻域Δ_x，它要么每个点都是上界，要么每个点皆不是上界. 这些邻域构成闭区间$[x_0, M]$ 的一个开覆盖，由有限覆盖定理，必存在有限子覆盖$\{\Delta_1. \cdots, \Delta_n\}$. 注意，$M$ 所在的开区间，应该每个点都是上界，与其相邻接的开区间由于包含一个为上界的点，因而其中的点均为E 的上界. 经过有限次邻接，可知x_0 所在的开区间中的点也为上界，从而矛盾. □

我们再来看看如何用有限覆盖定理来推其它几个定理. 对于确界定理，单调有界原理，柯西收敛原理的充分性，每个点x 可以找到开邻域Δ_x，使得Δ_x 中除中心点可能与$\{x_n\}$ 中的项相同之外，其余与$\{x_n\}$ 不相交；对于聚点原理，每个点x 可以找到开邻域Δ_x，除中心点可能属于原集合外，再无E 中的点；对于区间套定理，每点x 可以找到开邻域Δ_x，使得至少有某一个$[a_{n_0}, b_{n_0}]$ 与Δ_x 不相交，从而$n > n_0$ 时，$[a_n, b_n]$ 更不与Δ_x 相交. 然后利用有限覆盖定理找出矛盾.

区间套定理推有限覆盖定理. 假设某一区间$[a, b]$ 的某个开覆盖$\{\Delta\}$ 无有限子覆盖，将$[a, b]$ 两等分，则至少有一个“半区间”，它不能用$\{\Delta\}$ 的有限子集给覆盖住，将此半区间记为$[a_1, b_1]$ （如果两个半区间都如此，可任选其中的一个）. 然后再将$[a_1, b_1]$ 再二等分，重复上述步骤，无限进行下去，便得到一闭区间套$\{[a_n, b_n]\} : a_n \nearrow,\ b_n \searrow,\ b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b - a) \to 0$.（当$n \to \infty$ 时，每个$[a_n, b_n]$ 皆不能用$\{\Delta\}$ 的有限个覆盖.

利用闭区间套定理，可知存在一点ξ，为$[a_n, b_n]$ 的唯一公共点. 则ξ 点处产生矛盾，因为$\xi \in [a, b]$，所以存在一开区间$\Delta_1 = (\alpha, \beta) \in \{\Delta\}$，使得$\alpha < \xi < \beta$，但由于$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \xi$，所以$n$ 充分大时有

$$\alpha < a_n \leq \xi \leq b_n < \beta,$$

这表明$[a_n, b_n]$ 已被$\Delta_1 = (\alpha, \beta) \in \{\Delta\}$ 所覆盖，与$[a_n, b_n]$ 的本性矛盾. □

同理可以利用其它定理证明，所不同之处分别只是ξ 为a_n 的上确界，极限，$\{a_n\}$ 某子序列的极限，$\{a_n\} \cup \{b_n\}$之聚点.

1.3.2 基于等价类的实数理论

定义1.3.8. 设$\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 时两个有理数基本列，如果对任意$n \in \mathbb{N}$，存在$m \in \mathbb{N}$ 使得对任意$k \geq m$，$|x_k - y_k| < 1/n$，则称这两个有理数列是等价的，记为$\{x_n\} \sim \{y_n\}$.

引理1.3.9. *上述定义的有理数基本列等价满足反射性，对称性和传递性，从而是有理数基本列集合上的等价关系.*

证明. 反射性和对称性是比较明显的. 我们只需证明传递性. 设$\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 与$\{z_n\}$ 为有理数基本列且$\{x_n\}$ 与$\{y_n\}$ 等价，只需证：对任意的$\epsilon > 0$，存在依赖于ϵ 的正整数m 使得对任意$k \geq m$，$|x_k - z_k| \leq \epsilon$. 由假设的两个等价关系知：对于$\epsilon$，存在$m_1$ 使得对任意$k \geq m_1$，$|x_k - y_k| \leq \epsilon/2$；存在$m_2$ 使得对任意$k \geq m_2$，$|y_k - z_k| \leq \epsilon/2$. 取$m = \max(m_1, m_2)$，利用三角不等式，对任意$k \geq m$，都有

$$|x_k - z_k| \leq |(x_k - y_k) + (y_k - z_k)| \leq |x_k - y_k| + |y_k - z_k| \leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

从而得证. □

定义1.3.10. 设$\mathbb{R}$ 是有理数基本列集合$\mathcal{R}$ 在上述等价关系之下的全体等价类构成的集合. 我们称$\mathbb{R}$ 为实数系，它的元素–有理数基本列$\{x_n\}$的等价类，称为实数. 数列$\{x_n\}$ 称为实数x 的代表元，记为$x \sim \{x_n\}$. 我们还称等价类x 中的任意基本列收敛于x 或以x 为极限.

1.3.3 习题

习题1.3.11. 设$f(x)$ 在(a, b) 连续，求证$f(x)$ 在(a, b) 一致连续的充要条件是$\lim_{x\to a^+} f(x)$ 与$\lim_{x\to b^-} f(x)$ 都存在.

证明. 必要性. 设$f(x)$ 在(a, b) 一致连续，则$\forall \epsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，$\forall x_1$，$x_2 \in (a, b)$，当$|x_1 - x_2| < \delta$ 时，有$|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$. 若$x_1$，$x_2 \in (a, b)$ 且$0 < x_1 - a < \frac{\delta}{2}$，$0 < x_2 - a < \frac{\delta}{2}$，则$|x_1 - x_2| \leq |x_1 - a| + |x_2 - a| < \delta$，于是，有$|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$. 由连续变量的柯西收敛原理知，$\lim_{x\to a^+} f(x)$ 存在. 同理可证$\lim_{x\to b^-} f(x)$ 存在.

充分性. 定义函数

$$F(x) = \begin{cases} f(a+0),\, x = a, \\ \quad f(x),\, x \in (a, b), \\ f(b-0),\, x = b. \end{cases} \tag{1.1}$$

则F 在$[a,b]$ 上连续，于是其在$[a,b]$ 上一致连续，从而其也在(a,b) 上一致连续. 又当$x\in(a,b)$ 时，$F(x)=f(x)$，故$f(x)$ 在(a,b) 上一致连续. □

习题1.3.12. 利用柯西收敛原理讨论下列数列的收敛性

1. $x_n=a_0+a_1q+a_2q^2+\ldots+a_nq^n(|q|<1,\ |a_k|\le M)$;

证明. $\forall\epsilon>0,\forall p\in\mathbb{N}^+$，取$N=\max\{\frac{\ln[\epsilon\cdot(1-|q|)]-\ln M}{\ln|q|},1\}$，则$\forall n>N$，$\forall p>0$，有

$$\begin{aligned}|x_{n+p}-x_n| &=|a_{n+1}q^{n+1}+\cdots+a_{n+p}q^{n+p}|\\ &\le|a_{n+1}|\cdot|q^{n+1}|+\cdots+|a_{n+p}|\cdot|q^{n+p}|\\ &\le M\cdot|q|^{n+1}(1+|q|^2+\cdots+|q|^{p-1})\\ &<\tfrac{M|q|^{n+1}}{1-|q|}<\epsilon\end{aligned}$$

于是$\{x_n\}$ 收敛. □

习题1.3.13. 证明下列极限不存在：

1. $x_n=\sqrt[n]{1+2^{n(-1)^n}}$.

证明. 取$\epsilon_0<2-\sqrt{2}$，$\forall N\in\mathbb{N}^+$，取$p=1$，$n=2N-1$，则

$$\begin{aligned}|x_{n+p}-x_n| &=|(1+2^{2N})^{\frac{1}{2N}}+(1+\tfrac{1}{2^{2N-1}})^{\frac{1}{2N-1}}|\\ &\ge 2-\sqrt[2N-1]{2}\\ &\ge 2-\sqrt{2}>\epsilon_0.\end{aligned}$$

故$\{x_n\}$ 极限不存在. □

习题1.3.14. 设$f(x)$ 在(a,∞) 上可导，$|f'(x)|$ 单调下降，且$\lim_{x\to\infty}f(x)$ 存在，求证$\lim_{x\to\infty}xf'(x)=0$.

证明. 对任意$\epsilon>0$，存在$X>\max\{0,a\}$，使得对任意$x\in X$，有$|f(2x)-f(x)|<\epsilon$. 对任意$x>X$，由中值定理知，存在$\xi\in(x,2x)$，满足$f(2x)-f(x)=f'(\xi)(2x-x)=xf'(\xi)$. 从而有

$$|2xf'(2x)|=2|xf'(2x)|\le2|xf'(\xi)|<2\epsilon.$$

于是$\lim_{x\to\infty}xf'(x)=0$. □

习题1.3.15. 设$f(x)$ 在$(a,+\infty)$ 上可导，且$|f'(x)|\le k<1$，任给x_0，令

$$x_{n+1}=f(x_n)\ (n=0,1,2,\cdots),$$

求证：

1. $\lim_{n\to\infty}x_n$ 存在；

2. 上述极限为$x=f(x)$ 的根，且是唯一的.

证明. (1) 对于任意$x,y\in(-\infty,+\infty)$，存在ξ 介于x 和y 之间，使得$|f(x)-f(y)|=|f'(\xi)(x-y)|\le k|x-y|$. 于是

$$|x_{n+1}-x_n|=|f(x_n)-f(x_{n-1})|\le k|x_n-x_{n-1}|\le\cdots\le k^n|x_1-x_0|.$$

于是$\forall p>0$，

$$\begin{aligned} & |x_{n+p}-x_n|\le|x_{n+p}-x_{n+p-1}|+|x_{n+p-1}-x_{n+p-2}|+\cdots+|x_{n+1}-x_n| \\ \le\ & |x_1-x_0|(k^{n+p-1}+k^{n+p-2}+\cdots+k^n)\le\tfrac{k^n}{1-k}|x_1-x_0|\to 0(n\to\infty),\end{aligned}$$

由柯西收敛原理知$r=\lim_{n\to\infty}x_n$ 存在.

(2) 由$r=\lim_{n\to\infty}x_n$ 知$f(r)=r$. 若$f(x)=x$ 且$f(y)=y$ 则$|x-y|=|f(x)-f(y)|\le k|x-y|$ 从而$x=y$，于是知解是唯一的. □

习题1.3.16. 判断如下命题的真伪：数列$\{a_n\}$ 存在极限$\lim a_n=a$ 的充分必要条件是：对任一自然数p，都有$\lim_{n\to\infty}|a_{n+p}-a_n|=0$.

解. $a_n=\sqrt{n}$. **问题出在了此时对固定p，虽然有对于任意$\epsilon>0$ 存在N，当$n>N$ 时有$|x_{n+p}-x_n|<\epsilon$. 成立，但此时的N 时依赖于p 的，并不存在着一个一致的N.** □

1.4 再论闭区间上的连续函数的性质

习题1.4.1. 设$f(x)$ 在$[a,b]$ 连续，并且最大值点x_0 是唯一的. 又设$x_n\in[a,b]$，使$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(x_0)$，求证$\lim_{n\to\infty}x_n=x_0$.

证明. 反证法，如果$\lim_{n\to\infty}x_n\neq x_0$，则存在$\epsilon_0>0$，使得对任意$N\in\mathbb{N}$，存在$n>N$，使得$|x_n-x_0|\ge\epsilon_0$. 这说明在$(x_0-\epsilon_0,x_0+\epsilon_0)$ 之外有无穷多个x_n. 由于它们是有界的，故由紧致性定理知存在$\{x_n\}$ 的收敛子列$\{x_{n_k}\}$，设$x_{n_k}\to r\in[a,b](k\to\infty)$，这时$r\neq x_0$. 又$f(x)$ 在r 点连续，故$\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k})=f(r)$. 由于$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(x_0)$，故$\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k})=f(x_0)$. 根据极限的唯一性，$f(r)=f(x_0)$. 又因为$x_0$ 是唯一的最大值点，而$r\neq x_0$，所以$f(r)<f(x_0)$，矛盾. □

习题1.4.2. 设$f(x)$ 在$[a,b]$上连续，可微；又设

1. $\min_{a\le x\le b}f(x)<p<\max_{a\le x\le b}f(x)$;
2. 如果$f(x)=p$，则有$f'(x)\neq 0$.

求证$f(x)=p$的根只有有限多个.

证明. 用反证法. 若$f(x)=p$的根有无穷多个，而由它们在区间$[a,b]$内，故有界，从而存在收敛列$\{x_n\}: x_n \to x_0 \in [a,b]$，且$f(x_n)=p$. 又由$f$的连续性，有$f(x_0)=\lim_{n\to\infty} f(x_n)=p$. 于是

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0,$$

矛盾. 所以$f(x)=p$的根只有有限多个. □

习题1.4.3. 设$f(x)$ 在$[a,b]$ 连续，$f(a)<0$，$f(b)>0$，求证存在$\xi\in(a,b)$，使$f(\xi)=0$，且$f(x)>0(\xi<x\le b)$.

证明. 定义

$$E=\{c|c<b,\ x\in[c,b],\ f(x)>0\}.$$

由$f(x)$ 的连续性及$f(a)<0$，$f(b)>0$ 知E 非空且$\forall c\in E$，$a<c$，即E 有下界. 由确界定理知，E 有下确界. 设$\xi=\inf E$. 下面证明$f(\xi)=0$. 若不然，则$f(\xi)>0$ 或$f(\xi)<0$. 不妨设$f(\xi)>0$，由f 的连续性知，$\xi+\delta_0\in E$. 因此当$x\in[\xi-\delta_0,\xi+\delta_0]\cup[\xi+\delta_0,b]=[\xi-\delta_0,b]$ 时，有$f(x)>0$. 故$\xi-\delta_0\in E$，这与$\xi=\inf E$ 矛盾. 对任意$x_0\in(\xi,b]$，取c 使$\xi<c<x_0$，则$c\in E$. 从而$\forall x\in[c,b]$，$f(x)>0$，当然$f(x_0)>0$. 由x_0 的任意性知，$\forall x\in(\xi,b]$，$f(x)>0$. □

习题1.4.4. 设$f(x)$ 在(a,b) 一致连续，$a,b\ne\infty$，证明$f(x)$ 在(a,b) 上有界.

证明. 由于$f(x)$ 在(a,b) 一致连续，由习题1.3.11知，$f(a+0)$，$f(b-0)$均存在，定义

$$F(x)=\begin{cases} f(a+0),\ x=a,\\ \quad f(x),\ x\in(a,b),\\ f(b-0),\ x=b.\end{cases} \tag{1.2}$$

则$F(x)$ 在$[a,b]$ 连续，由有界性定理，知$f(x)$ 在$[a,b]$ 上有界，从而$f(x)$ 在(a,b) 上有界. □

习题1.4.5. 设$f(x)$ 在$(-\infty,\infty)$ 连续，且$\lim_{x\to-\infty} f(x)$ 与$\lim_{x\to+\infty} f(x)$ 存在，证明$f(x)$ 在$(-\infty,\infty)$ 一致连续.

证明. 设$\lim_{x\to-\infty} f(x)=A$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=B$. 则$\forall\epsilon>0$, $\exists X_1>0$，当$x<-X_1$时，有$|f(x)-A|<\frac{\epsilon}{2}$；$\exists X_2>0$，当$x>X_2$时，有$|f(x)-B|<\frac{\epsilon}{2}$. 由一致连续定理，$f(x)$ 在$[-X_1-1,X_2+1]$ 上一致连续，故$\exists\delta_1>0$，$\forall x',x''\in[-X_1-1,X_2+1]$，当$|x'-x''|<\delta_1$ 时，有$|f(x')-f(x'')|<\epsilon$. 因此$\forall>0$，取$\delta=\min\{\delta_1,1\}$，则当$x',x''\in(-\infty,+\infty)$ 且$|x'-x''|<\delta$ 时，必有x',x'' 同属于$[-X_1-1,X_2+1]$，或同属于$(-\infty,-X_1)$，或同属

于$(X_2,+\infty)$. 若$x',x''\in[-X_1-1,X_2+1]$，则$|f(x')-f(x'')|<\epsilon$；若$x',x''<-X_1$，则有

$$|f(x')-f(x'')|\le|f(x')-A|+|f(x'')-A|<\tfrac{\epsilon}{2}+\tfrac{\epsilon}{2}=\epsilon;$$

若$x',x''>X_2$，则同样有$|f(x')-f(x'')|<\epsilon$. 故总有$|f(x')-f(x'')|<\epsilon$. 从而$f(x)$ 在$(-\infty,\infty)$ 一致连续. □

习题1.4.6. 设函数$f(x)$在$(a,+\infty)$上可导，且有$\lim_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$，求证$f(x)$在$(a,+\infty)$上不一致连续.

证明. 取$\epsilon_0=1$，$\forall\delta>0$，由于$\lim_{x\to\infty}f'(x)=+\infty$，则$\exists X>\max\{a,0\}$，当$x>X$ 时，有$f'(x)>\frac{2}{\delta}$. 现取$x'=X+\delta$，$x''=X+\frac{\delta}{2}$，则$|x'-x''|=\frac{\delta}{2}<\delta$. 由拉格朗日中值定理得，$|f(x')-f(x'')|=|f'(\xi)(x'-x'')|>\frac{2}{\delta}\cdot\frac{\delta}{2}=1=\epsilon_0$，其中$x''<\xi<x'$. 故$f(x)$在$(a,+\infty)$上不一致连续. □

习题1.4.7. 求证$f(x)=x\ln x$在$(0,+\infty)$上不一致连续.

证明. 由于$\lim_{x\to+\infty}f'(x)=\lim_{x\to+\infty}(\ln x+1)=+\infty$，则由于上题的结论知$f(x)=x\ln x$在$(0,+\infty)$上不一致连续. □

1.5 可积性

习题1.5.1. 讨论$f(x)$，$f^2(x)$，$|f(x)|$三者间可积性的关系.

证明.

- 若$f(x)$可积，则$f^2(x)$，$|f(x)|$可积.
- 若$f^2(x)$可积或$|f(x)|$可积，但$f(x)$不一定可积.
- $f^2(x)$可积等价于$|f(x)|$可积.

□

习题1.5.2. 设$f(x)\ge0$，$f''(x)\le0$，对任意$x\in[a,b]$ 成立，求证：

$$f(x)\le\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

证明. 对于$y\in[a,x]$，由$f''(y)\le0$，我们有

$$f(y)\ge\frac{y-a}{x-a}f(a)+\frac{x-y}{x-a}f(x)\ge\frac{x-y}{x-a}f(x).\ (\text{因为}f(a)\ge0)$$

两边关于y 从a 到x 积分，我们有

$$\int_a^x f(y)dy\ge\int_a^x\frac{x-y}{x-a}dy\cdot f(x)=\frac{1}{2}(x-a)f(x).$$

类似的，我们有
$$\int_b^x f(y)dy \geq \frac{1}{2}(b-x)f(x).$$
两式相加我们就可以得到所需要的结果. □

习题1.5.3. 设$f(x)$ 在$[a,b]$ 有连续的导函数，求证：
$$\max_{a\leq x\leq b}|f(x)| \leq |\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx| + \int_a^b |f'(x)|dx.$$

证明. 因$f(x)$ 在$[a,b]$ 连续，由积分中值定理得，$\exists\xi\in[a,b]$，使
$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

对上述ξ，$\forall x\in[a,b]$，
$$f(x) = f(\xi) + \int_\xi^x f'(t)dt = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx + \int_\xi^x f'(t)dt.$$

于是
$$\begin{aligned}|f(x)| &= |\tfrac{1}{b-a}\textstyle\int_a^b f(x)dx + \int_\xi^x f'(t)dt| \\ &\leq |\tfrac{1}{b-a}\textstyle\int_a^b f(x)dx| + |\int_\xi^x f'(t)dt| \\ &\leq |\tfrac{1}{b-a}\textstyle\int_a^b f(x)dx| + \int_a^b |f'(x)|dx.\end{aligned}$$

从而得证. □

习题1.5.4. 若函数$f(x)$ 在$[A,B]$ 上可积，证明：
$$\lim_{h\to 0}\int_a^b |f(x+h)-f(x)|dx = 0,$$

其中$A<a<b<B$.

证明. 因$f(x)$在$[A,B]$可积，故对任意$\epsilon>0$，存在$N\in\mathbb{N}^+$，使得对于任意$n>N$，以及对$[A,B]$的n等分划Δ: $x_i = A+\frac{i}{n}(B-A)$，$i=0,1,2,\ldots,n$，有$\sum_{i=1}^n \omega_i\Delta x_i < \frac{\epsilon}{4}$，其中$\omega_i$是$f(x)$在第$i$个小区间的振幅. 取$\delta=\min\{a-A, B-b, \frac{B-A}{n}\}$，则当$0<h<\delta$ 时，有：
$$\begin{aligned}&\textstyle\int_a^b |f(x+h)-f(x)|dx \leq \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x+h)-f(x)|dx \\ \leq\ & \textstyle\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} [|f(x+h)-f(x_i)| + |f(x_i)-f(x)|]dx \\ \leq\ & \textstyle\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\omega_{i+1}+\omega_i)dx = \sum_{i=1}^n(\omega_{i+1}+\omega_i)\Delta x_i < \epsilon.\end{aligned}$$

由此知，当$h\to 0^+$时结论成立，同理可证$h\to 0^-$时结论也成立. □

习题1.5.5. 若$f(x)$在$[a,b]$上可积，$f(x)>0$，试证：
$$\int_a^b f(x)dx > 0.$$

证明. 注意到$f(x)>0$，有$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i>0$，因而由可积性知

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \geq 0.$$

我们用反证法，证明这里的等号不可能发生. 设$\int_a^b f(x)dx = 0$，则对于$f(x)$的Darboux上和有

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} M_1\Delta x_i=0.$$

从而对任意$\epsilon_1>0$，存在分划T，使得$\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta_i<\epsilon_1(b-a)$. 由此知存在一个$M_i<\epsilon_1$，因为若不然，每个$M_i\geq\epsilon_1$，则$\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta_i\geq\epsilon_1\sum_{\Delta} x_i=\epsilon_1(b-a)$，矛盾.

将$M_i<\epsilon_1$的这个小区间记为$[a_1,b_1]$. 于是$f(x)$在$[a_1,b_1]$上可积，把$[a_1,b_1]$取作上面的$[a,b]$，重复上述推理，可得到$[a_2,b_2]\subset[a_1,b_1]$，使得

$$\sup_{a_2\leq x\leq b_2} f(x)\leq\epsilon_2=\epsilon_1/2.$$

如此无限进行下去，可以得到一串区间

$$[a,b]\supseteq[a_1,b_1]\supseteq\cdots\supseteq[a_n,b_n]\supseteq\cdots$$

使每个$[a_n,b_n]$上，有$\sup f(x)\leq\epsilon_n$ $(n=1,2,\cdots)$，由区间套定理，存在$\xi\in[a_n,b_n]$ $(n=1,2,\cdots)$，从而$0\leq f(\xi)<\epsilon_n$ $(n=1,2,\cdots)$. 由于$\epsilon_n\to 0$，可知$f(\xi)=0$. 与已知条件$f(x)>0$矛盾. □

第二章　数项级数

2.1　数项级数的收敛性及其基本性质

习题2.1.1. 求下列级数的和：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n-4)(5n+1)}$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}$;

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos nx (|r| < 1)$.

解. (1) $1/5$;

(2) $1/2$;

(3) $2/3$;

(4) 3;

(5) 记$S_n = \sum_{k=1}^{n} r^k \cos kx$，则有$2r\cos x S_n = \sum_{k=1}^{n} 2r^{k+1}\cos x \cos kx$. 我们有

$$\begin{aligned} 2r\cos x S_n &= \sum_{k=1}^{n} r^{k+1}[\cos(k+1)x + \cos(k-1)x] \\ &= [r^{n+1}\cos(n+1)x + S_n - r\cos x] + [r^2 + r^2 S_n - r^{n+2}\cos nx], \end{aligned}$$

故$S_n = \frac{r^{n+2}\cos nx - r^{n+1}\cos(n+1)x + r\cos x - r^2}{1+r^2-2r\cos x}$，于是$S_n \to \frac{r\cos x - r^2}{1+r^2-2r\cos x}$ $(n \to \infty)$. 于是级数的和为$\frac{r\cos x - r^2}{1+r^2-2r\cos x}$.

□

习题2.1.2. 讨论下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1}$;

(2) $\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}$;

(3) $\sum_{s=1}^{\infty}\cos\frac{\pi}{2n+1}$;

(4) $\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$;

(5) $\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}$.

解. (1) 发散;

(2) 收敛;

(3) 发散;

(4) 收敛;

(5) 收敛.

□

习题2.1.3. 设级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$各项都是正的，把级数的项经过组合而得到新级数$\sum_{n=1}^{\infty}U_n$，即

$$U_{n+1}=u_{k_n+1}+u_{k_n+2}+\cdots+u_{k_{n+1}},\ n=0,1,2,\cdots,$$

其中$k_0=0$，$k_0<k_1<\cdots<k_n<\cdots$. 若$\sum_{n=1}^{\infty}U_n$ 收敛，证明原来的级数也收敛.

证明. 由于$\sum_{n=1}^{\infty}$ 收敛，记其和为S. 设$S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k$，故$\forall n\in\mathbb{N}^+$，$\exists n_0\in\mathbb{N}^+$，使得$S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k\le\sum_{i=1}^{n_0}U_i<S$. 显然$S_n<S_{n+1}$ （因为级数各项都是正的），于是$\{S_n\}$ 单调上升且有上界，因此$\lim_{n\to\infty}S_n$ 存在，即原级数收敛. □

习题2.1.4. 设$a_n>0$，$s_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，且$\sum a_n$ 发散. 证明$\sum\dfrac{a_n}{1+a_n}$发散.

证明. 记$b_n=\dfrac{a_n}{1+a_n}$，则$a_n=\dfrac{b_n}{1-b_n}$. 如果$\sum b_n=\sum\dfrac{a_n}{1+a_n}$收敛，则$\exists N\in\mathbb{N}$，当$n\ge N$时，有$0<b_n\le\dfrac{1}{2}$，则$a_n<2b_n$，从而$\sum a_n$收敛，矛盾. □

2.2 正项级数

习题2.2.1. 若正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，证明：$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n}=0$.

证明. 记$S=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$，则$S_n\to S$（当$n\to\infty$时）. 注意到我们有

$$\sum_{k=1}^{n}ka_k=nS_n-\sum_{k=1}^{n-1}S_k,$$

从而我们有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}ka_k}{n}=\lim_{n\to\infty}(S_n-\frac{S_1+S_2+\cdots+S_{n-1}}{n})=S-S=0.$$

从而得证. □

注意此时我们不能由正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛推出$\lim_{n\to\infty}na_n=0$. 具体例子可参见例2.2.5.

习题2.2.2. 设$a_n\geq 0$，且$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l$. 求证$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l$. 反之是否成立？

证明. 反之不成立. 例如，对于级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+(-1)^n}{2^{n+1}}$，有$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1/2$. 但是极限$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$不存在. □

习题2.2.3. 若正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$收敛，证明$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$也收敛.

证明. 由条件知正整数列$\{a_n\}$为正无穷大量，下面我们分两步来处理.

1. 若数列$\{a_n\}$ 单调增加，则有

   $$a_1+\cdots+a_{2n-1}\geq a_n+\cdots+a_{2n-1}\geq na_n,$$

   因此有不等式：

   $$\frac{2n-1}{a_1+\cdots+a_{2n-1}}+\frac{2n}{a_1+\cdots+a_{2n}}\leq\frac{2n-1}{na_n}+\frac{2n}{a_n}<\frac{4}{a_n},$$

   从而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$的部分和数列有上界，因此收敛. 同时我们还得到

   $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\leq 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}.$$

2. 对于一般情况，将数列$\{a_n\}$按照从小到大重排，并将重排后的数列记为$\{b_n\}$. 根据收敛的正项级数在重排后仍收敛，因此级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b_n}$收敛. 由前面讨论我们知道级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{b_1+b_2+\cdots+=b_n}$收敛. 同时容易看出对于每个$n$成立不等式

   $$b_1+b_2+\cdots+b_n\leq a_1+a_2+\cdots+a_n,$$

因此有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{b_1+b_2+\cdots+=b_n},$$

于是由比较判别法就知道级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$收敛.

综上得证. □

例2.2.4. 任给一个收敛的正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$，可以构造一个收敛于零的正数列$\{c_n\}$，使$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{c_n}$ 仍然收敛.

令$r_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k$，$c_n=\sqrt{r_{n-1}}+\sqrt{r_n}$，因$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，所以我们有$\lim_{n\to\infty}c_n=0$. 现证级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{c_n}$收敛. 为此，令

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{c_k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{r_{k-1}-r_k}{\sqrt{r_{k-1}}+\sqrt{r_k}}=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{r_{k-1}}-\sqrt{r_k}),$$

则当$n>m$ 时，

$$|s_n-s_m|=\sum_{k=m+1}^{n}(\sqrt{r_{k-1}}-\sqrt{r_k})=\sqrt{r_m}-\sqrt{r_n}\to 0\ (m,n\to\infty).$$

由柯西收敛原理，知级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{c_n}$收敛.

例2.2.5. 试写出一正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$，使得

- $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛；
- $a_n\neq o(\frac{1}{n})$.

设正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$满足当$n=$整数平方数时有$a_n=\frac{1}{n}$，否则$a_n=\frac{1}{n^2}$. 显然$a_n\neq o(\frac{1}{n})$. 又因为对任意$\forall n\in\mathbb{N}$，部分和

$$S_n\leq 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\leq 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}<+\infty.$$

故此级数收敛.

2.3　一般项级数

习题2.3.1. 讨论下列级数的收敛性：

1. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$;
2. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$

证明. 1. 记$c_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$，则有

$$c_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}=\frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+(-1)^n)}\sim\frac{1}{n},$$

而级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$收敛，从而知级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$发散.

2. 从表面上来看，本题既不是正项级数，又不能使用狄利克雷或阿贝尔判别法. 但稍作变形，就知它是一交错级数，实际上可以证明

$$\sin(\pi\sqrt{n^2+1})=(-1)^n\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}.$$

从而知级数收敛.

□

习题2.3.2. 若$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n-1})$绝对收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$收敛.

证明. 因为$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n-1})$绝对收敛，所以$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n-1})$收敛，从而知$\{a_n\}$有界，设$|a_n|\le M$. 又$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$收敛，由柯西收敛原理知，对于任意$\epsilon>0$，存在$N\in\mathbb{N}^+$，使得对任意$n>N$，任意$p\in\mathbb{N}^+$，有$|\sum_{k=n+1}^{n+p}b_k|<\frac{\epsilon}{1+M}$，以及$\sum_{k=n+1}^{n+p}|a_k-a_{k+1}|<1$. 记$S_{n+i}=\sum_{k=n+1}^{n+i}b_k$ $(i=1,2,\dots,p)$，则有

$$\begin{aligned}
|\textstyle\sum_{k=n+1}^{n+p}a_kb_k| &=|a_{n+1}b_{n+1}+a_{n+2}b_{n+2}+\cdots+a_{n+p}b_{n+p}|\\
&=|S_{n+1}a_{n+1}+(S_{n+2}-S_{n+1})a_{n+2}+\cdots+(S_{n+p}-S_{n+p-1})a_{n+p}|\\
&=|S_{n+1}(a_{n+1}-a_{n+2})+\cdots+S_{n+p-1}(a_{n+p-1}-a_{n+p})+S_{n+p}a_{n+p}|\\
&\le|S_{n+1}||a_{n+1}-a_{n+2}|+\ldots+|s_{n+p-1}||a_{n+p-1}-a_{n+p}|+|S_{n+p}||a_{n+p}|\\
&\le\tfrac{\epsilon}{1+M}(\textstyle\sum_{k=n+1}^{n+p-1}|a_k-a_{k+1}|+|a_{n+p}|)\le\tfrac{\epsilon}{1+M}(1+M)=\epsilon.
\end{aligned}$$

故$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$收敛. □

2.4 无穷级数与代数运算

习题2.4.1. 证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$收敛.

证明. 将级数中相邻的同号项合并，从而组成一个交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^na_n$，其中

$$\begin{aligned}
a_n &=\tfrac{1}{n^2}+\tfrac{1}{n^2+1}+\cdots+\tfrac{1}{(n+1)^2-1}\\
&=\tfrac{1}{n^2}\textstyle\sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{1+\frac{k}{n^2}}=\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{2n}[1-\frac{k}{n^2}+O(\frac{k^2}{n^4})]\\
&=\tfrac{1}{n^2}[(2n+1)-\tfrac{2n+1}{n}+O(\tfrac{1}{n})]=\tfrac{2}{n}-\tfrac{1}{n^2}+O(\tfrac{1}{n^3}).
\end{aligned}$$

由此即可知$\{a_n\}$为无穷小量，且至少当n充分大时单调减少：

$$a_n - a_{n+1} = \frac{2}{n^2} + O(\frac{1}{n^3}).$$

这表明原级数加括号后得到的级数收敛. 由于括号中的项符号相同，所以可知原级数收敛. □

习题2.4.2. 设$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$是$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$的一个重排，其中$\{a_n\}$中正项之间的顺序以及负项之间的顺序与重排之前相同，又设在$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$的前n项中有p_n个正项，且存在极限$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{n} = p$，证明$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \ln 2 + \frac{1}{2}\ln(\frac{p}{1-p})$ (当$p=0$, 1时将右边的表达式理解为它在$(0,1)$两端的广义极限$-\infty$和$+\infty$).

证明. 直接计算$\sum_{n=1}^{\infty}$的部分和数列如下：

$$\begin{aligned} S_n &= (1 + \tfrac{1}{3} + \cdots + \tfrac{1}{2p_n - 1}) - (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \cdots + \tfrac{1}{2(n-p_n)}) \\ &= (1 + \tfrac{1}{3} + \cdots + \tfrac{1}{2p_n}) - \tfrac{1}{2}(1 + \tfrac{1}{2} + \cdots + \tfrac{1}{p_n}) - \tfrac{1}{2}(1 + \tfrac{1}{2} + \cdots + \tfrac{1}{n-p_n}), \end{aligned}$$

然后利用渐近等式

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + o(1),$$

其中γ为Euler常数，就可以得到

$$\begin{aligned} S_n &= [\ln(2p_n) + \gamma + o(1)] - \tfrac{1}{2}[\ln p_n + \gamma + o(1)] - \tfrac{1}{2}[\ln(n-p_n) + \gamma + o(1)] \\ &= \ln 2 + \tfrac{1}{2}\ln(\tfrac{p_n}{n-p_n}) + o(1) = \ln 2 + \tfrac{1}{2}\ln(\tfrac{p_n/n}{1-p_n/n}) + o(1), \end{aligned}$$

令$n \to \infty$可得. □

习题2.4.3. 把级数

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \cdots$$

的项重新安排如下：先依次取p个正项，接着依次取q个负项，再接着依次取p个正项，如此继续下去. 试证所得新级数收敛的充分必要条件是$p=q$；当$p>q$时，新级数发散到$+\infty$；当$p<q$时，新级数发散到$-\infty$.

证明. 设重排以后的新级数为$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. 对于任给的正整数N，记$m = [\frac{N}{p+q}]$，则当$N\to\infty$时有$m\to\infty$，且$m(p+q) \le N < (m+1)(p+q)$. 把$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$的部分和写成

$$\sum_{n=1}^{N} a_n = \sum_{n=1}^{m(p+q)} a_n + \sum_{n=m(p+q)+1}^{N} a_n.$$

因为$N-m(p+q)<p+q$，这说明第二个和式的项数不超过$p+q$. 因而当$N\to\infty$ 时，有

$$|\sum_{n=m(p+q)+1}^{N} a_n| \le \sum_{n=m(p+q)+1}^{N} |a_n| \le (p+q)\frac{1}{\sqrt{m}} = \frac{p+q}{\sqrt{m}} \to 0.$$

于是我们有

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \textstyle\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} a_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{m(p+q)} a_n \\ &= \textstyle\lim_{n\to\infty}(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n-1}} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n}}). \end{aligned}$$

由于

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} = 2\sqrt{n}+\beta+O(\frac{1}{\sqrt{n}}),\ n\to\infty,$$

这里β时某个常数. 于是我们有

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \textstyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2m}(\sqrt{p}-\sqrt{q}) + (1-\sqrt{2})\beta + O(\frac{1}{\sqrt{m}}) \\ &= \begin{cases} (1-\sqrt{2}\beta), \text{若} p=q, \\ \qquad +\infty, \text{若} p>q, \\ \qquad -\infty, \text{若} p<q. \end{cases} \end{aligned}$$

这就是要证明的. □

第三章　广义积分

3.1　无穷限广义积分

习题3.1.1. 讨论下列积分的收敛性：

1. $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4+1}}$;
2. $\int_1^\infty \frac{a\arctan x}{1+x^3}dx$;
3. $\int_1^\infty \sin\frac{1}{x^2}dx$.

证明.　1. 收敛.

2. 收敛.

3. 收敛.

□

习题3.1.2. 讨论下列无穷积分的收敛性（包括绝对收敛或条件收敛）：

1. $\int_1^\infty \frac{\cos^2 x}{x}dx$;
2. $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^p}$.

证明.　1. 发散.

2. 当$p>1$时，绝对收敛；当$0<p\le 1$时，条件收敛；当$p\le 0$时，发散.

□

习题3.1.3. 证明若$f(x)$在$[a,+\infty)$上单调下降，且积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛，则$\lim_{x\to\infty}xf(x)=0$.

证明. 不妨设$a>0$，$f(x)\ge 0$. 由$f(x)$的单调性知，$\int_{\frac{x}{2}}^x f(t)dt \ge \frac{x}{2}f(x)$，$\forall x\in[a,+\infty)$. 因此利用无穷限积分的柯西收敛原理，我们有$\lim_{x\to\infty}xf(x)=0$. □

习题3.1.4. 设$f(x)$在$[0,+\infty)$一致收敛，并且积分 $\int_0^\infty f(x)dx$ 收敛. 证明$\lim_{x\to\infty} f(x)=0$. 如果仅知道积分$\int_0^\infty f(x)dx$收敛，以及$f(x)$在$[0,+\infty)$上连续，$f(x)\geq 0$，是否仍有$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$?

证明. 由于$f(x)$在$[0,+\infty)$一致连续，$\forall\epsilon>0$，$\exists\delta>0$（不妨设$\delta\leq\epsilon$），$\forall x_1$，$x_2\in(0,+\infty)$，当$|x_1-x_2|<\delta$时，有$|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{\epsilon}{2}$. 又因为$\int_0^\infty f(x)dx$ 收敛，我们有对上述$\delta>0$，存在$M>0$，当x_1，$x_2>M$时，有$|\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx|<\frac{\delta^2}{2}$. 于是对所有$x>M$以及$M<x_1\leq x\leq x_2$，$x_2-x_1=\delta$，有

$$\begin{aligned}\delta|f(x)| &\leq |\int_{x_1}^{x_2} f(x)dt| \\ &\leq |\int_{x_1}^{x_2}[f(x)-f(t)]dt|+|\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt| \\ &\leq \int_{x_1}^{x_2}|f(x)-f(t)|dt+|\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt| \\ &< \frac{\epsilon}{2}\delta+\frac{\delta^2}{2},\end{aligned}$$

所以当$x>M$时，$|f(x)|<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\delta}{2}\leq\epsilon$，即$\lim_{x\to\infty} f(x)=0$.

如果仅是积分$\int_0^\infty f(x)dx$收敛，以及$f(x)$在$[0,+\infty)$上连续，$f(x)\geq 0$，则不能推出$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$. 例如，函数$g(x)=\begin{cases}0,\ x\in[n-1,n-\dfrac{1}{n\cdot 2^n}) \\ n,\ x\in[n-\dfrac{1}{n\cdot 2^n},n)\end{cases}$，$n=1,2,\cdots$ 则$\lim_{n\to\infty} g(x)$不存在，且它在$[0,+\infty)$上无界，然而$\int_0^\infty g(x)dx=\sum_{n=1}^\infty \frac{n}{n\cdot 2^n}=\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n}=1$.

现在我们把$g(x)$的定义稍作修改，使每一狭条长方形顶边的中点与底边的两端分别相连，所得函数$f(x)$即为非负连续函数，且$\int_0^\infty f(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} g(x)dx=\frac{1}{2}$仍然收敛，但是$\lim_{x\to\infty} f(x)\neq 0$. □

如果f是连续的，虽然我们不能得到$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$，但我们可以找到序列$\{x_n\}$满足$\lim_{n\to+\infty} x_n=+\infty$使得$\lim_{n\to+\infty} f(x_n)=0$. 若没有连续性，这一点也不能保证.（具体细节留作思考）

习题3.1.5. 设$\int_a^\infty f(x)dx$，$\int_a^{+\infty} f'(x)dx$都收敛，求证$\lim_{x\to\infty} f(x)=0$.

证明. 若不然，则存在$\epsilon_0>0$，及$x_n\to\infty$，使得$|f(x_n)|>\epsilon_0$，设$f(x_n)$中有无穷多项为正(无穷多项为负类似可证)，则可以将负项去掉，不妨设$f(x_n)>\epsilon_0(n=1,2,\cdots)$. 因$\int_a^\infty f(x)dx$收敛，知存在序列$\{x'_m\}:x'_m\to+\infty$，使得$f(x'_m)<\frac{\epsilon_0}{2}$，$m=1,2,\cdots$(若不然，则存在$G>0$，对任意$x>G$，恒有$f(x)\geq\frac{\epsilon_0}{2}$，于是当$A>G$时，$\int_A^{2A} f(x)dx\geq\frac{\epsilon_0}{2}A\to+\infty(A\to+\infty)$，与$\int_a^\infty f(x)dx$收敛矛盾). 于是对任意$n,m$，有$|\int_{x'_m}^{x_n} f'(x)dx|=|f(x_n)-f(x'_m)|\geq\frac{\epsilon}{2}>0$，与$\int_a^\infty f'(x)dx$收敛矛盾. □

习题3.1.6. 证明：

1. 设$f(x)$在$[0,+\infty)$连续，且$\lim_{x\to\infty} f(x)=k$，则
$$\int_0^{\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=[f(0)-k]\ln\frac{b}{a}\ (b>a>0).$$

2. 若上述条件$\lim_{x\to\infty} f(x)=k$改为$\int_a^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx$存在$(a>0)$，则
$$\int_0^{\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=f(0)\ln\frac{b}{a}\ (b>a>0).$$

证明. 1. 任取$\delta>0$，$A>\delta$，$\int_\delta^A\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=\int_{a\delta}^{aA}\frac{f(x)}{x}dx-\int_{b\delta}^{bA}\frac{f(x)}{x}dx=\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{f(x)}{x}dx-\int_{aA}^{bA}\frac{f(x)}{x}dx=f(\xi)\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{1}{x}dx-f(\eta)\int_{aA}^{bA}\frac{1}{x}dx=[f(\xi)-f(\eta)]\ln\frac{b}{a}$. 其中$\delta a\le\xi\le\delta b$，$Aa\le\eta\le Ab$，因此$\lim_{\delta\to0^+}\xi=0$，$\lim_{A\to\infty}\eta=+\infty$. 所以
$$\int_0^{\infty}\tfrac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=[f(0)-k]\ln\tfrac{b}{a}$$

2. 由$\int_a^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx$收敛知，$\int_{aA}^{bA}\frac{f(x)}{x}dx=0$，因此在（1）的推导中，最后的极限将少去第二项，于是$\int_0^{\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=f(0)\ln\frac{b}{a}$.

□

3.2 瑕积分

习题3.2.1. 讨论下列积分的收敛性：

1. $\int_0^1\frac{\sin x}{x^{\frac{1}{2}}}dx$;
2. $\int_0^1\frac{1}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}dx$;
3. $\int_0^1\frac{\ln x}{1-x^2}dx$;
4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^2x\cos^2x}$;
5. $\int_0^1|\ln x|^p dx$.
6. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos x}{x^m}dx$.

证明. 1. 收敛.

2. 收敛.

3. 收敛.

4. 发散.

5. 当$p \leq -1$发散，$p > -1$时收敛.

6. 当$m < 3$积分收敛，$m \geq 3$积分发散.

$\square$

习题3.2.2. 讨论下列积分的收敛性与绝对收敛性：

1. $\int_0^\infty \sin^2 x dx$;

2. $\int_0^\infty x^p \sin(x^q) dx\ (q \neq 0)$;

3. $\int_0^\infty \frac{x^p \sin x}{1+x^q} dx\ (q \geq 0)$;

4. $\int_0^\infty \frac{\sin(x+\frac{1}{x})}{x^n} dx$.

解. 1. 条件收敛.

2. 当$-1 < \frac{p+1}{q} < 0$时绝对收敛，当$0 \leq \frac{p+1}{q} < 1$时条件收敛；其他情况发散.

3. 当$p > -2$，$q > p+1$时绝对收敛，当$p > -2$，$p < q \leq p+1$时条件收敛. 其它时候发散.

4. 当$0 < n < 2$时条件收敛，其它时候发散.

   当$n \leq 0$时，积分显然是发散的. 当$n > 0$时，首先考我们虑积分$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x+\frac{1}{x})}{x^n} dx\ (a > 1)$. 由于

$$\int_a^{+\infty} \frac{\sin(x+\frac{1}{x})}{x^n} dx = \int_a^{+\infty} \frac{(1-\frac{1}{x^2})\sin(x+\frac{1}{x^2})}{x^n(1-\frac{1}{x^2})} dx,$$

   而

$$|\int_a^A (1-\frac{1}{x^2})\sin(x+\frac{1}{x^2})dx| = |\cos(a+\frac{1}{a} - \cos(A+\frac{1}{A})| \leq 2.$$

   注意到当x充分大时，函数$x^n(1-\frac{1}{x^2})$单调递增，于是函数$\frac{1}{x^n(1-\frac{1}{x^2})}$当$x$充分大时单调递减趋于0. 由此可知，当$n > 0$时，积分$\int_a^{+\infty} \frac{\sin(x+\frac{1}{x})}{x^n} dx$收敛.

   再考虑积分$\int_0^{a'} \frac{\sin(x+\frac{1}{x})}{x^n} dx\ (0 < a' < 1)$. 设$x = \frac{1}{t}$，则

$$\int_0^{a'} \frac{\sin(x+\frac{1}{x})}{x^n} dx\ (0 < a' < 1) = \int_{\frac{1}{a'}}^{\infty} \frac{\sin(t+\frac{1}{t})}{t^{2-n}} dt,$$

   由前所述，我们知此积分当且仅当$n < 2$时收敛.

注意到当$0<a'<1<a$时，积分$\int_{a'}^{a}\frac{\sin(x+\frac{1}{x})}{x^n}dx$为一个常义积分. 从而综上有当$0<n<2$时，积分$\int_0^\infty\frac{\sin(x+\frac{1}{x})}{x^n}dx$收敛.

可以证明：积分$\int_0^\infty\frac{|\sin(x+\frac{1}{x})|}{x^n}dx$当$0<n<2$时发散. 事实上，

$$\frac{|\sin(x+\frac{1}{x})|}{x^n}\geq\frac{\sin^2(x+\frac{1}{x})}{x^n}\geq\frac{1-\cos(2x+\frac{2}{x})}{2x^n},$$

当$0<n<1$时，积分$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^n}$显然发散，积分$\int_a^{+\infty}\frac{\cos(2x+\frac{2}{x})}{x^n}dx$收敛（仿前面证明），故当$0<n\leq 1$时，积分$\int_0^\infty\frac{|\sin(x+\frac{1}{x})|}{x^n}dx$发散. 对于$1<n<2$的情况，可考虑对积分作变换$x=\frac{1}{t}$，类似可以证明积分$\int_0^\infty\frac{|\sin(x+\frac{1}{x})|}{x^n}dx$发散.

综上所述，我们有当$0<n<2$时条件收敛，其它时候发散. □

习题3.2.3. 计算下列瑕积分的值

1. $\int_0^1(\ln x)^n dx$，$n\in\mathbb{N}^+$.
2. $\int_0^1\frac{x^n}{\sqrt{1-x}}dx$.

解. 1. $(-1)^n n!$.

2. $2\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$. □

习题3.2.4. 计算积分$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)dx$.

解. 此广义积分瑕点为$x=0$. 利用柯西判别法，容易验证其收敛性.

先作代换$x=2t$，得到

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}2\ln(\sin 2t)dt=\frac{\pi}{2}\ln 2+\int_0^{\frac{\pi}{4}}2\ln(\sin t)dt+\int_0^{\frac{\pi}{4}}2\ln(\cos t)dt,$$

对右边最后一个积分用代换$t=\pi/2-u$，得到

$$\begin{aligned}I&=\tfrac{\pi}{2}\ln 2+\int_0^{\frac{\pi}{4}}2\ln(\sin t)dt+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}2\ln(\sin t)dt\\&=\tfrac{\pi}{2}\ln 2+\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\ln(\sin t)dt=\tfrac{\pi}{2}\ln 2+2I.\end{aligned}$$

所以有$I=-\frac{\pi}{2}\ln 2$. □

3.3 补充材料

3.3.1 Dirichlet判别法的必要性

命题3.3.1. 设f在$[a,b)$上内的任一闭区间可积，b为奇点，广义积分$\int_a^b f(x)dx$收敛的充分必要条件是存在分解$f=uv$，使得

(1) 函数u在$[a,b)$上单调，且$\lim_{x\to b^-} u(x)=0$;

(2) 对任何$b'>a$，积分$\int_a^{b'} v(x)dx$存在且有界

证明. 充分性见课本. 下面只对$b=\infty$情形的必要性给出证明，对于其它情况证明是类似的.

从广义积分$\int_a^\infty f(x)dx$收敛，根据柯西收敛准则，存在$A_1>a$，使得对于任何$B>A\ge A_1$，有$|\int_A^B f(x)dx|<1$.

归纳地可知，对于$n\ge 2$，存在$A_n\ge A_{n-1}+1$，使得对于任何$B>A\ge A_n$，成立$|\int_A^B f(x)dx|<\frac{1}{n^3}$. 这样我们得到了一个严格单调递增趋于无穷大的序列$\{A_n\}$.

现在定义

$$u(x)=\begin{cases} 1,\ a\le x\le A_1, \\ \dfrac{1}{n},\ A_< x\le A_{n+1},\ n\in\mathbb{N}^+; \end{cases}$$

以及

$$v(x)=\frac{f(x)}{u(x)},\ a\le x\le\infty.$$

这样就有分解$f=uv$，其中显然函数u满足条件(1)，于是下面我们只需证明函数v满足条件(2). 因此只需要证明它在任意闭区间$[a,A]$上的积分有界.

由于当$a\le A\le A_1$时，有$v(x)=f(x)$，因此存在常数$L>0$，使得对这样的A成立

$$|\int_a^A v(x)dx|<L.$$

若$A>A_1$，则存在n，使得$A_n<A\le A_{n+1}$. 这是根据定义，可以做分解

$$\int_a^A v(x)dx=(\int_a^{A_1}+\int_{A_1}^{A_2}+2\int_{A_2}^{A_3}+\cdots+(n-1)\int_{A_{n-1}}^{A_n}+n\int_{A_n}^{A})f(x)dx,$$

从而不难由三角不等式得

$$\begin{aligned} |\textstyle\int_a^A v(x)dx| &\le |\textstyle\int_a^{A_1} f|+|\int_{A_1}^{A_2} f|+2|\int_{A_2}^{A_3} f|+\cdots+(n-1)|\int_{A_{n-1}}^{A_n} f|+n|\int_{A_n}^{A} f| \\ &\le L+1+2\cdot\tfrac{1}{2^3}+\cdots+(n-1)\cdot\tfrac{1}{(n-1)^3}+n\cdot\tfrac{1}{n^3} \\ &= L+1+\tfrac{1}{2^2}+\cdots+\tfrac{1}{n^2} \\ &< L+2. \end{aligned}$$

从而得证. □

第四章

4.1 函数序列的一致收敛概念

习题4.1.1. 讨论下列函数序列在所示区域的一致收敛性：

1. $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}},\ x \in (-\infty, +\infty);$
2. $f_n(x) = \sin\frac{x}{n},\ (i)\ x \in (-l, l);\ (ii)\ x \in (-\infty, +\infty);$
3. $f_n(x) = \frac{nx}{1+nx},\ x \in (0, 1);$
4. $f_n(x) = \frac{1}{1+nx},\ (i)\ x \in [a, +\infty),\ a > 0,\ (ii)\ x \in (0, +\infty);$
5. $f_n(x) = \frac{n^2x^2}{1+n^3x^3},\ (i)\ x \in [a, +\infty),\ a > 0,\ (ii)\ x \in (0, +\infty);$
6. $f_n(x) = \frac{nx}{1+n+x},\ x \in [0, 1];$
7. $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n},\ (i)\ x \in [0, b],\ b < 1;\ (ii)\ x \in [0, 1];\ (iii)\ x \in [a, +\infty),\ a > 1;$
8. $f_n(x) = x^n - x^{2n}\ x \in [0, 1];$
9. $f_n(x) = x^n - x^{n+1}\ x \in [0, 1];$
10. $f_n(x) = \frac{x}{n}\ln\frac{x}{n},\ x \in (0, 1);$
11. $f_n(x) = \frac{1}{n}\ln(1 + e^{-nx});$
12. $f_n(x) = e^{-(x-n)^2},\ (i)\ x \in [-l, l];\ (ii)\ x \in (-\infty, +\infty).$

解. 1. 在$(-\infty, +\infty)$上一致收敛于$|x|$.

2. (i)在$(-l, l)$一致收敛于0；(ii)在$(-\infty, +\infty)$收敛而不一致收敛.

3. 在$(0, 1)$收敛但不一致收敛.

4. (i)在$[a, +\infty)$一致收敛于0；(ii)在$(0, +\infty)$收敛而不一致收敛.

5. (i)在$[a,+\infty)$一致收敛于0；(ii)在$(0,+\infty)$收敛而不一致收敛.

6. 在$[0,1]$内一致收敛于x.

7. (i)一致收敛，(ii)不一致收敛，(iii)一致收敛

8. 在$[0,1]$内收敛而不一致收敛.

9. 在$[0,1]$内一致收敛于0.

10. 在$(0,1)$内一致收敛于0.

11. 一致收敛.

12. (i)在$[-l,l]$一致收敛于0；(ii)在$(-\infty,+\infty)$收敛而不一致收敛.

□

习题4.1.2. 设$f_n(x)(n=1,2,\cdots)$在$[a,b]$上有界，并且$|f_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛，求证$f_n(x)$在$[a,b]$上一致有界.

证明. 已知$f_n(x)(n=1,2,\cdots)$在$[a,b]$上有界. 则$\exists M_n>0$，使得对任意$x\in[a,b]$，有$|f_n(x)|\le M_n$. 设$f_n(x)$在$[a,b]$一致收敛于$f(x)$. 则$\forall\epsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{N}^+$，$\forall n>N$，$\forall x\in[a,b]$ 有$|f_n(x)-f(x)|<\epsilon$. 特别地对$\epsilon_0=1$，$\exists N_0\in\mathbb{N}^+$，$\forall x\in[a,b]$，$|f_{N_0+1}(x)-f(x)|<\epsilon_0=1$，从而$|f(x)|\le 1+|f(x)|\le 2+M_{N_0+1}$. 所以$\forall n>N_0$，$\forall x\in[a,b]$，$|f_n(x)|<1+|f(x)|\le 2+M_{N_0+1}$. 取$M=\max\{M_1,M_2,\cdots,M_{N_0},2+M_{N_0+1}\}$，则$\forall n\in\mathbb{N}^+$，$\forall x\in[a,b]$，有$|f_n(x)|\le M$，即$f_n(x)$在$[a,b]$上一致有界. □

习题4.1.3. 问参数α取什么值时，$f_n(x)=n^\alpha xe^{-nx}$, $n=1,2,3,\cdots$在闭区间$[0,1]$收敛？在闭区间$[0,1]$一致收敛？使$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx$可在积分号下取极限？

解. 1. 当$x=0$时，对任意α，均有$f_n(x)=0$；当$x\neq 0$且$x\in(0,1]$时，对任意α，均有$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n x}{e^{-nx}}=0$. 因此对于任意$\alpha$，$f_n(x)$在$[0,1]$上收敛于函数$f(x)=0$.

2. 由于$f_n'(x)=n^a e^{-nx}(1-nx)$，故当$x=\frac{1}{n}$时，$f_n'(x)=0$. 又由于当$x<\frac{1}{n}$，$f_n'(x)>0$；当$x>\frac{1}{n}$时，$f_n'(x)<0$；故$x=\frac{1}{n}$为$f_n(x)$在$[0,1]$上的最大值点，因此$\rho_n=\sup_{x\in[0,1]}[f_n(x)-0]=\sup_{x\in[0,1]}n^\alpha xe^{-nx}=n^{\alpha-1}e^{-1}$. 当$\alpha<1$且$n\to\infty$时，有$\rho_n\to 0$. 于是当$\alpha<1$时，$f_n(x)$在$[0,1]$上一致收敛于函数$f(x)=0$.

3. $\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_0^1 0dx = 0$. $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} n^{\alpha-2}(1-e^{-n}-ne^{-n}) = 0$. 从而当$\alpha < 2$时，$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx$ 可在积分号下取极限.

□

习题4.1.4. 设$f_n(x)(n=1,2,\cdots)$在$(-\infty,+\infty)$一致连续，且$\{f_n(x)\}$在$(-\infty,+\infty)$一致收敛于$f(x)$. 求证$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$一致连续.

证明. 由$\{f_n(x)\}$一致收敛于$f(x)$知，$\forall\epsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}^+$, $\forall n>N$, $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，当$|x_1-x_2|<\delta$，有$f_{N+1}(x_1)-f_{N+1}(x_2)|<\epsilon$. 于是有

$$\begin{aligned}|f(x_1)-f(x_2)| &= |f(x_1)-f_{N+1}(x_1)+f_{N+1}(x_1)-f_{N+1}(x_2)+f_{N+1}(x_2)-f(x_2)|\\ &\le |f(x_1)-f_{N+1}(x_1)|+|f_{N+1}(x_1)-f_{N+1}(x_2)|+|f_{N+1}(x_2)-f(x_2)|\\ &< \epsilon+\epsilon+\epsilon = 3\epsilon.\end{aligned}$$

于是我们有$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$一致连续. □

4.2 函数项级数的一致收敛性及其判别法

习题4.2.1. 讨论下列函数项级数的一致收敛性

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}$, $x\in(-\infty,+\infty)$;
2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^4x^2}$, $x\in(-\infty,+\infty)$;
3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(1-e^{-nx})}{n^2+x^2}$, $x\in[0,+\infty)$;
4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{x+2^n}$, $x\in(-2,+\infty)$;
5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{1+n^5x^2}$, $x\in(-\infty,+\infty)$;
6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n+x^{-n})$, $\frac{1}{2}\le|x|\le 2$;
7. $\sum_{n=1}^{\infty}x^2e^{-nx}$;
8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n\ln^n x}{n!}$, $x\in[0,1]$;
9. $\sum_{n=2}^{\infty}[\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}-\sqrt{x^2+\frac{1}{(n-1)^2}}$, $x\in(-\infty,+\infty)$;
10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{x^n}$, $|x|\ge r>1$;
11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(1+nx)}{nx^n}$, $x\in[a,+\infty)$, $a>1$.

解. 均一致收敛. □

习题4.2.2. 讨论下列函数项级数的一致收敛性

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{\sqrt{n^2+x^2}}$, $x \in (-\infty, +\infty)$;

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x \sin nx}{\sqrt{x+n}} (0 < x < \infty)$;

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$, $x \in (-1, +\infty)$;

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\sin x}$, $x \in (-\infty, +\infty)$;

5. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{1}{3^n x}$, $x \in (0, +\infty)$;

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\sqrt[3]{n^2+e^x}}$, $|x| \le a$.

解. 1. 一致收敛.

2. 一致收敛.

3. 一致收敛.

4. 一致收敛.

5. 不一致收敛.

6. 一致收敛.

□

习题4.2.3. 设每一项$\varphi_n(x)$都是$[a,b]$上的单调函数，如果$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$在$[a,b]$的端点为绝对收敛，那么这级数在$[a,b]$一致收敛.

证明. 由假设我们知$\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(a)|$及$\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(b)|$收敛. 因此$\sum_{n=1}^{\infty} [|\varphi_n(a)| + |\varphi_n(b)|]$收敛，又由$\varphi_n(x)$在$[a,b]$单调，故$|\varphi_n(x)| \le |\varphi_n(a)| + |\varphi_n(b)|$，$\forall x \in [a,b]$. 从而由比较判别法知，$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$ 绝对收敛；由M判别法我们有$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$在$[a,b]$一致收敛. □

习题4.2.4. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的一般项$|u_n(x)| \le c_n(c)$, $x \in X$，并且 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x)$ 在 X 一致收敛，证明 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在X上也一致收敛且绝对收敛.

证明. 因为$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x)$在$X$一致收敛，由柯西原理，$\forall \epsilon > 0$，$\exists N \in \mathbb{N}^+$，当$n > N$时，$\forall p \in \mathbb{N}^+$, $\forall x \in X$，都有$\sum_{k=n+1}^{n+p} c_k(x) \le |\sum_{k=n+1}^{n+p} c_k(x)| < \epsilon$. 由于$|u_n(x)| \le c_n(x)$, $x \in X$，从而$|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k(x)| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k(x) < \epsilon$，由柯西原理，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$X$也一致收敛且绝对收敛. □

习题4.2.5. 证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n+x^2}$关于$x$在$(-\infty,+\infty)$一致收敛，但对任何$x$并非绝对收敛；而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$虽在$x\in(-\infty,+\infty)$绝对收敛，但并不一致收敛.

证明. 由于$\forall x\in(-\infty,+\infty)$，$\frac{1}{n+x^2}\leq\frac{1}{n}$，因此$\frac{1}{n+x^2}$对每个固定的$x\in(-\infty,+\infty)$关于$n$时单调的，且在$(-\infty,+\infty)$一致收敛于0. 而$|\sum_{k=1}^{n}(-1)^k|\leq 1$，由狄利克雷判别法知，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n+x^2}$在$(-\infty,+\infty)$一致收敛. 不难看出任何$x$该级数非绝对收敛.

下面讨论级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$，$\forall x\in(-\infty,+\infty)$，它为正项几何级数，公比$r=\frac{1}{1+x^2}\leq 1$. 从而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$在$x\in(-\infty,+\infty)$绝对收敛. 易知和函数$S(x)=\begin{cases}0,\ x=0,\\ 1,\ x\neq 0.\end{cases}$于是

$$|S_n(x)-S(x)|=\begin{cases}0,\ x=0,\\ \dfrac{1}{(1+x^2)^n},\ x\neq 0.\end{cases}$$

由于$\sup_{x\in(-\infty,+\infty)}|S_n(x)-S(x)|=1$，因此级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$在$(-\infty,+\infty)$上不一致收敛. □

习题4.2.6. 设$[a,b]$是一个闭区间，并设对于每个整数$n\geq 1$，$f^{(n)}:[a,b]\to\mathbb{R}$是黎曼可积函数. 假设$(f^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ 在$[a,b]$上一致收敛到函数$f:[a,b]\to\mathbb{R}$，那么f也是黎曼可积的，并且

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[a,b]}f^{(n)}=\int_{[a,b]}f.$$

证明. 我们先证f在$[a,b]$上是黎曼可积的，即f的上积分$\overline{\int}_{[a,b]}f$与下积分$\underline{\int}^{[a,b]}f$相等.

设$\epsilon>0$. 由于$(f^{(n)})_{n=1}^{\infty}$一致收敛到f，所以存在$N>0$，使得对于任意$n>N$和$x\in[a,b]$，有

$$|f^{(n)}(x)-f(x)|<\epsilon.$$

于是任意$x\in[a,b]$，有

$$f^{(n)}(x)-\epsilon<f(x)<f^{(n)}(x)+\epsilon.$$

在$[a,b]$上对上式积分，我们有

$$\underline{\int}_{[a,b]}(f^{(n)}-\epsilon)\leq\underline{\int}_{[a,b]}f\leq\overline{\int}_{[a,b]}f\leq\overline{\int}_{[a,b]}(f^{(n)}+\epsilon).$$

注意到$f^{(n)}$是黎曼可积的，所以

$$(\underline{\int}_{[a,b]} f^{(n)}) - \epsilon(b-a) \le \underline{\int}_{[a,b]} f \le \overline{\int}_{[a,b]} f \le (\overline{\int}_{[a,b]} f^{(n)}) + \epsilon(b-a).$$

于是$0 \le \overline{\int}_{[a,b]} f - \underline{\int}_{[a,b]} f \le 2\epsilon(b-a)$. 由$\epsilon$的任意性，我们知$f$的上积分$\overline{\int}_{[a,b]} f$与下积分$\underline{\int}^{[a,b]} f$相等.

同时，由上述证明也可知，对于每个$\epsilon > 0$，存在$N > 0$，使得对于任意$n \ge N$，$|\int_{[a,b]} f^{(n)} - \int_{[a,b]} f| \le 2\epsilon(b-a)$，这表明$\int_{[a,b]} f^{(n)}$收敛到$\int_{[a,b]} f$.

□

4.3 和函数的分析性质

习题4.3.1. 求证$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$在$(-\infty, +\infty)$内连续，并有连续导函数.

证明. 由于$|\frac{\sin nx}{n^3}| \le \frac{1}{n^3}$，由M-判别法知，原级数在$(-\infty, +\infty)$上一致收敛. 又对于任意$n$，$u_n(x) = \frac{\sin nx}{n^3}$在$(-\infty, +\infty)$上连续，从而和函数$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$在$(-\infty, +\infty)$内连续. 由于$u_n'(x) = \frac{\cos nx}{n^2}$在$(-\infty, +\infty)$上连续，且级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$一致收敛，根据函数项级数一致收敛的性质知，上述级数的和在$(-\infty, +\infty)$上连续，且有$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$. □

习题4.3.2. 设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$(a, b)$内一致收敛，$u_n(x)(n = 1, 2, \ldots)$在$[a, b]$上连续，求证：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$[a, b]$上一致收敛；

(2) $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$[a, b]$上连续.

证明. (1) 设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$(a, b)$一致收敛，由柯西原理，$\forall \epsilon > 0$, $\exists \in \mathbb{N}^+$, $\forall n > N$, $\forall p \in \mathbb{N}^+, \forall x \in (a, b)$，有$|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)| < \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$. 由于$u_n(x)(n = 1, 2, \cdots)$在$[a, b]$连续，特别地，在$x = a$, $x = b$点连续，在上式中分别令$x \to a$, $x \to b$得，$|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(a)| \le \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$，$|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(b)| \le \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$. 于是$\forall \epsilon > 0$，$\exists N \in \mathbb{N}^+$，$\forall n > N$，$\forall p \in \mathbb{N}^+$，$\forall x \in [a, b]$，有$|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)| < \epsilon$，即$\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)$在$[a, b]$一致收敛.

(2) 由(1)知，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$[a, b]$一致收敛，又$\forall n$，$u_n(x)$ 在$[a, b]$ 连续，于是根据和函数的连续性知，$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$[a, b]$连续. □

习题4.3.3. 设$\{x_n\}$是$(0, 1)$内的一个数列，即$0 < x_n < 1$，且$x_i \ne x_j(i \ne j)$. 试讨论函数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sgn(x - x_n)}{2^n}$$

在$(0,1)$中的连续性.

证明. 首先，由$\frac{sgn(x-x_n)}{2^n} \le \frac{1}{2^n}$对任意$x \in (0,1)$成立，以及$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$收敛，所以$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sgn(x-x_n)}{2^n}$在$(0,1)$内一致收敛.

设$x_0 \ne x_n(n=1,2,\cdots)$为区间$(0,1)$内任意一点，则通项$u_n(x) = \frac{sgn(x-x_n)}{2^n}$在$x=x_0$处连续，于是对任意$\epsilon > 0$，取$N$充分大使得$\frac{1}{2^{N+1}} < \epsilon$，取$\delta > 0$充分小使得$x_1,\cdots,x_N$都不在区间$(x_0-\delta, x_0+\delta)$内，于是对任意$x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$，$|f(x)-f(x_0)| < \epsilon$，从而$f$在点$x=x_0$处连续.

设x_k是$\{x_n\}$中任意一点，因$f(x) = \sum_{n\ne k} \frac{sgn(x-x_n)}{2^n} + \frac{sgn(x-x_k)}{2^k}$, 右边第一项在$x=x_k$处连续，第二项在$x=x_k$处间断，因此$f(x)$在$x=x_k$处间断. □

习题4.3.4. 设级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，证明：$\lim_{x\to 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

证明. 由于级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，且对于任意$x \in (0,+\infty)$当$n \to \infty$时$\{\frac{1}{n^x}\}$单调下降且$|\frac{1}{n^x}| \le 1$，从而由阿贝尔判别法知$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$在$[0,+\infty)$上一致收敛. 而对于任意$n$，$\frac{a_n}{n^x}$在$[0,+\infty)$ 上连续，所以$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$在$[0,+\infty)$上连续，从而我们有$\lim_{x\to 0^+} S(x) = \lim_{x\to 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to 0^+} \frac{a_n}{n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. □

习题4.3.5. 设$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$，求证：

(1) $f(x)$在$x \ge 0$连续；

(2) $f(x)$在$x > 0$时无穷次可微.

证明. (1) 由于对任意$x \in [0,+\infty)$，有$|\frac{e^{-nx}}{1+n^2}| \le \frac{1}{1+n^2}$，而$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$ 收敛，根据M-判别法，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$在$[0,+\infty)$一致收敛. 又对每个$n$，函数$u_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$ 在$[0,+\infty)$ 上连续，故$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$在$[0,+\infty)$ 上连续.

(2) 对于任意$x_0 > 0$，在$[\frac{x_0}{2},+\infty)$上，$u_n'(x) = \frac{-ne^{-nx}}{1+n^2}$连续. 同时$|u_n'(x)| = |\frac{-n}{(1+n^2)e^{nx}}| \le \frac{n}{(1+n^2)e^{\frac{nx_0}{2}}}, \forall x \in [\frac{x_0}{2},+\infty)$，而$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(1+n^2)e^{\frac{nx_0}{2}}}$ 收敛（狄利克雷判别法），由M-判别法，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-ne^{-nx}}{1+n^2}$ 在$[\frac{x_0}{2},+\infty)$上一致收敛，于是$f(x)$在$[\frac{x_0}{2},+\infty)$上可导，且$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-ne^{-nx}}{1+n^2}$ 对任意$x \in [\frac{x_0}{2},+\infty)$成立. 由于$X_0 > x_0/2$，故$f$ 在x_0处可微且$f'(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-ne^{-nx_0}}{1+n^2}$. 由$x_0 > 0$ 的任意性知$f(x)$在$x > 0$可微. 类似地我们有$f(x)$在$x > 0$时无穷次可微. □

第五章　幂级数

5.1　幂级数的收敛半径与收敛区域

习题5.1.1. 设$|\sum_{k=0}^{n} a_k x_1^k| \le M(n = 0, 1, 2, \ldots;\ x_1 > 0)$，求证当$0 < x < x_1$时，有

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛；

(2) $|\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n| \le M$.

证明. (1) 由于$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n \cdot (\frac{x}{x_1})^n$，而$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$的部分和有界，且$\{(\frac{x}{x_1})^n\}$单调下降趋于0. 于是由狄利克雷判别法知其收敛.

(2) 我们有$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n \cdot (\frac{x}{x_1})^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{k=0}^{n} a_k x_1^k)((\frac{x}{x_1})^n - (\frac{x}{x_1})^{n+1})$. 于是我们有$|\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n| \le \sum_{n=0}^{\infty} M((\frac{x}{x_1})^n - (\frac{x}{x_1})^{n+1}) = M$. 从而得证. □

5.2　幂级数的性质

习题5.2.1. 用逐项微分或逐项积分求下列级数的和：

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n x^n$;
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)} x^{2n}$;
3. $\sum_{n=0}^{\infty} (2^{n+1} - 1) x^n$.

解. 1. $\frac{x}{(1-x)^2}$;

2. $2x \arctan x - \ln(1 + x^2)$;

3. $\frac{1}{(1-x)(1-2x)}$.

□

习题5.2.2. 求下列级数的和：

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$;

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2n+1)}$.

解. 1. 3;

2. $2-\ln 2$.

□

5.3 函数的幂级数展开

习题5.3.1. 求下列级数的和：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n!2^n}x^n$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^3}{(n+1)!}x^n$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)^2}{n!}x^{2n+1}$.

解.

(1) $(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4})e^{\frac{x}{2}}-1$;

(2) 当$x\neq 0$ 时和式等于$-\frac{1}{x}+e^{-x}(\frac{1}{x}+1+x^2)$，当$x=0$时和式为0;

(3) $(4x^5+8x^3+x)e^{x^2}-x$. □

第六章　傅里叶级数

6.1　三角级数与傅里叶级数

习题6.1.1. 求下列周期为2π的函数的傅里叶级数：

(1) 三角多项式$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n}(a_i \cos ix + b_i \sin ix)$;

(2) $f(x) = \cos \frac{x}{2}$;

(3) $f(x) = |\sin x|\ (-\pi < x < \pi)$;

(4) $f(x) = \begin{cases} x,\ \pi < x < 0 \\ 0,\ 0 \le x < \pi \end{cases}$

(5) $f(x) = \mathrm{sgn}(\cos x)$.

解. (1) $a_0 + \sum_{i=1}^{n}(a_i \cos ix + b_i \sin ix)$;

(2) $\frac{1}{\pi}[2 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{4}{1-4n^2} \cos nx]$;

(3) $\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2-1}$；

(4) $-\frac{pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1-(-1)^n)}{n^2\pi} \cos nx + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx)$;

(5) $\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}[(-1)^k \frac{\cos(2k+1)x}{2k+1}]$. □

计算容易犯的错误：正负号搞错，$\int_{-\pi}^{0} x = -\frac{pi}{2}$注意负号，若$n = 1$函数$\cos(1-n)x$的原函数并不是$\frac{\sin(1-n)x}{1-n} + C$而是$x + C$.

6.2　傅里叶级数的收敛性

习题6.2.1. 由展开式

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}\ (-\pi < x < \pi),$$

(1) 用逐项积分法求x^2, x^3, x^4在$(-\pi,\pi)$中的傅里叶展开式；

(2) 求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^4}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$的和.

解. (1) 逐项积分，我们有：

$$\begin{aligned}x^2 &= \tfrac{\pi^2}{3}+\textstyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\tfrac{4}{n^2}\cos nx;\\ x^3 &= 2\textstyle\sum_{n=1}^{\infty}((-1)^{n+1}\tfrac{\pi^2}{n}+(-1)^n\tfrac{6}{n^3})\sin nx;\\ x^4 &= \tfrac{\pi^4}{5}+\textstyle\sum_{n=1}^{\infty}(\tfrac{48}{n^4}-\tfrac{8\pi^2}{n^2})(-1)^{n+1}\cos nx.\end{aligned}$$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^4}=\frac{7\pi^4}{720}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$.

□

习题6.2.2. (1) 在$(-\pi,\pi)$内，求$f(x)=e^x$得傅里叶展开式；

(2) 求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}$的和.

解. (1) $\frac{2}{\pi}\mathrm{sh}\pi[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}((-1)^n\frac{1}{n^2+1}\cos nx+(-1)^{n+1}\frac{n}{n^2+1}\sin nx]$.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}=\frac{1}{2}(\pi\mathrm{coth}\pi-1)$. □

习题6.2.3. 证明：若三角函数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

中的系数a_n，b_n满足关系

$$\max\{|n^3a_n|,|n^3b_n|\}\le M,$$

M为常数，则上述三角级数收敛，且其和函数具有连续的导函数.

证明. 因为

$$|a_n\cos nx+b_n\sin nx|\le|a_n\cos nx|+|b_n\sin nx|\le|a_n|+|b_n|\le\frac{2M}{n^3},$$

且级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2M}{n^3}$收敛，所以级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

收敛，并且绝对收敛和一致收敛. 对该级数逐项求导，我们得级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(nb_n\cos nx-na_n\sin nx).$$

由于

$$|nb_n \cos nx - na_n \sin nx| \le |nb_n \cos nx| + |na_n \sin nx| \le |na_n| + |nb_n| \le \frac{2M}{n^2},$$

且级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2M}{n^2}$收敛，所以级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(nb_n \cos nx - na_n \sin nx)$$

一致收敛. 于是此级数的和函数连续. 于是由函数项级数的逐项求导定理我们有上述结论. □

习题6.2.4. 设$f(x)$以2π为周期，在$(0,2\pi)$上单调递减，且有界. 求证：$a_n \ge 0\ (n > 0)$.

证明. 将区间$(0,2\pi)$作n等分，则

$$\begin{aligned} b_n &= \tfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx = \tfrac{1}{\pi}\sum_{i=1}^n \int_{(i-1)\frac{2\pi}{n}}^{i\frac{2\pi}{n}} f(x)\sin nx dx \\ &= \tfrac{1}{\pi}\sum_{i=1}^n [\int_{(i-1)\frac{2\pi}{n}}^{(i-\frac{1}{2})\frac{2\pi}{n}} f(x)\sin nx dx + \int_{(i-\frac{1}{2})\frac{2\pi}{n}}^{i\frac{2\pi}{n}} f(x)\sin nx dx] \\ &= \tfrac{1}{\pi}\sum_{i=1}^n [\int_{(i-1)\frac{2\pi}{n}}^{(i-\frac{1}{2})\frac{2\pi}{n}} f(x)\sin nx dx + \int_{(i-\frac{1}{2})\frac{2\pi}{n}}^{i\frac{2\pi}{n}} f(t+\tfrac{\pi}{n})\sin nt dt](\text{其中}x = t+\tfrac{\pi}{n}) \\ &= \tfrac{1}{\pi}\sum_{i=1}^n [\int_{(i-1)\frac{2\pi}{n}}^{(i-\frac{1}{2})\frac{2\pi}{n}} [f(x) - f(x+\tfrac{\pi}{n})]\sin nx dx] \ge 0. \end{aligned}$$

最后一个不等式是因为$f(x)$在$(0,2\pi)$上单调递减，且在区间$[(i-1)\frac{2\pi}{n},(i-\frac{1}{2})\frac{2\pi}{n}]$上$\sin nx \ge 0$. □

6.3 任意区间上的傅里叶级数

习题6.3.1. 求下列周期函数的傅里叶级数：

(1) $f(x) = |\cos x|$;

(2) $f(x) = x - [x]$.

解. (1) $\frac{1}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^k+1}{4k^2-1}\cos 2kx$;

(2) $\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\pi x}{n}$. □

6.4 傅里叶级数的平均收敛性

习题6.4.1. 若$f(x)$，$g(x)$以2π为周期，在$[-\pi,\pi]$平方可积，

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),\ g(x) \sim \frac{a_0}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx)$$

则
$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx = \frac{a_0\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\alpha_n + b_n\beta_n).$$

证明. 若$f(x)$，$g(x)$在$[-\pi,\pi]$平方可积，则$f+g$和$f-g$也是平方可积的，应用Paseval等式于$f+g$和$f-g$，得：

$$\begin{array}{l}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)+g(x))^2dx = \frac{(a_0+\alpha_0)^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}((a_k+\alpha_k)^2 + (b_k+\beta_k)^2, \\ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-g(x))^2dx = \frac{(a_0-\alpha_0)^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}((a_k-\alpha_k)^2 + (b_k-\beta_k)^2.\end{array}$$

以上两式相减即得我们所需得等式. □

第七章　多元函数的极限与连续性