1.(20分) 小明从星期一开始每天玩一次或两次游戏，他在相继的日子中玩游戏的次数是一个以

$$P_{1,1} = 0.2,\ P_{1,2} = 0.8,\ P_{2,1} = 0.4,\ P_{2,2} = 0.6$$

为转移概率的马尔可夫链. 假设小明每次获胜的概率为p，而且他在星期一玩两次游戏.

(a) 他在星期二玩的游戏都赢的概率是多少？

(b) 他在星期三平均玩多少次游戏？

(c) 小明赢得所有游戏的天数比例的期望是多少？

2.(15分) 事件A的发生构成一个速率为λ的泊松过程$\{N(t), t \geq 0\}$，如果每次事件发生时能够以概率p被记录下来，并以$M(t)$表示到时刻t被记录下来的事件总数，则$\{M(t), t \geq 0\}$是一个速率为λp的泊松过程.

3.(10分) 设$\{W_t, t \geq 0\}$为一个标准布朗运动，记$Y_t = e^{cW_t - c^2 t/2}$，其中c为任意一个实值常数. 求证$\{Y_t, t \geq 0\}$是鞅，并求$E[Y_t]$.

4.(15分) 考虑$\{0, 1, 2, 3, \cdots\}$上的马尔可夫链$\{X_n\}$，其转移概率为$p(0, 1) = 1$；

$$p(x, x+1) = \frac{x^2 + 2x + 1}{2x^2 + 2x + 1},\ p(x, x-1) = \frac{x^2}{2x^2 + 2x + 1},\ x \geq 1;$$

若$|x - y| \geq 2$，则$p(x, y) = 0$. 证明该马尔可夫链是非常返的并计算$\rho_x = P(\tau < \infty | X_0 = x)$，其中$\tau = \min\{n \geq 1,\ X_n = 0\}$.

5.(10分) 设$\{W_t, t \geq 0\}$为一个标准布朗运动，利用Itô公式证明：

$$\int_0^t W_t^2 dW_s = \frac{1}{3} W_t^3 - \int_0^t W_s ds.$$

6.(10分) 满足对一切$i \neq j$有$P_{ij} > 0$的有限个状态的遍历马尔可夫链是时间可逆的，当且仅当对一切i, j, k有

$$P_{ij} P_{jk} P_{ki} = P_{ik} P_{kj} P_{ji}.$$

7.(10分) 考虑有限集合$\{1, 2, \cdots, N\}$上的连续时间马尔可夫链，其概率转移矩阵为$P_t = (p_{ij}(t))$. 证明对所有t有$det(P_t) > 0$.