1. (10分) 在一个度量空间(X,ρ)上，求证：基本列是收敛列，当且仅当其中存在一串收敛子列.

2. （10分）设X是B*空间，求证：X是Banach空间，必须且仅须对任意$\{x_n\}\subset X$，$\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|<\infty\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}$收敛.

3. (10分) 设M是Hilbert空间X的子集，求证：

$$(M^{\perp})^{\perp}=\overline{\mathrm{span}M}.$$

4. (10分) 设X,Y是Banach空间，$U\in L(X,Y)$，又设方程$Ux=y$对每一个$y\in Y$有解$x\in X$，并且$\exists m>0$，使得

$$\|Ux\|\geq m\|x\|\ (\forall x\in\ X).$$

求证：U有连续逆U^{-1}，并且$\|U^{-1}\|\leq 1/m$.

5. (15分) 在l^2中定义线性算子：

$$T:(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\mapsto(x_1,\frac{x_2}{2},\cdots,\frac{x_n}{n},\cdots),$$

证明T是l^2上的有界线性泛函，并求T^*.

6. (15分) 设X为线性空间，求证：为了M是X的极大线性子空间，必须且仅须$\dim(X/M)=1$.

7. (15分) 在l^2空间上，考查左推移算子

$$A:(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n,\cdots)\mapsto(x_2,\cdots,x_{n-1},x_n,\cdots),$$

求证：

1. $\{\lambda\in\mathbb{C}||\lambda|>1\}\subset\rho(A)$;
2. $\{\lambda\in\mathbb{C}||\lambda|<1\}\subset\sigma_p(A)$;
3. $\{\lambda\in\mathbb{C}||\lambda|-1\}\subset\sigma_c(A)$;
4. $\sigma_r(A)=\emptyset$.

8. (15分) 设C是Banach空间X中的一个有界闭凸集，映射$T_i:C\to X(i=1,2)$满足

1. $\forall x,y\in C,\ T_1x+T_2y\in C$;
2. T_1是一个压缩映射，T_2是一个紧映射.

求证：T_1+T_2在C上至少有一个不动点.