习题1

截止时间：3月13日

习题1. 设$k > 0$，A是度量空间(X, d)的一个子集，设映射$f : A \to \mathbb{R}$满足$|f(x) - f(y)| \leq kd(x, y)$对所有的$x, y \in A$成立. 证明存在映射$\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$，使得对所有的$x \in A$，有$\tilde{f} = f(x)$，且对所有的$x, y \in X$，有$|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)| \leq kd(x, y)$.

提示. 对$a \in A$，我们定义

$$f_a : X \to \mathbb{R},\ f_a(x) = f(a) + kd(x, a).$$

我们可以证明$|f_a(x) - f_a(y)| \leq kd(x, y)$对所有的$x, y \in A$成立. 注意对于$a \in A$，我们有$f_a(a) = f(a)$，现在的问题就是如何把这些$f_a$联系起来. 我们可以定义

$$f : X \to \mathbb{R}\ f(x) = \inf_{a \in A} f_a(x).$$

同时，我们可以证明下面的事实：

设$k > 0$，A是度量空间(X, d)的一个子集，设映射$f_i : A \to \mathbb{R}$是一族映射，满足$|f_i(x) - f_i(y)| \leq kd(x, y)$对所有的$x, y \in A$成立，其中$I$是一个指标集. 考察函数

$$F_1 : x \mapsto \inf_{i \in I} f_i(x), x \in A,$$

以及

$$F_2 : x \mapsto \sup_{i \in I} f_i(x), x \in A.$$

证明上面两个函数若在某一点取值不为无穷大(这一点很重要，避免函数恒为$-\infty$或$+\infty$)，则有

$$|F_1(x) - F_1(y)| \leq kd(x, y)$$

以及

$$|F_2(x) - F_2(y)| \leq kd(x, y).$$

习题2. 设(X,d)为完备的度量空间，映射$f:X\to X$满足对某$p\geq 2$，含有p个因子的复合映射$f\circ f\circ\cdots\circ f$为压缩映射. 注意，这里我们并不要求$f$是连续的.

(1) 证明f有且仅有一个不动点x.

(2) 证明：任给$x_0\in X$，由$x_{n+1}=f(x_n)$, $n\geq 0$定义的序列$(x_n)_{n=0}^{\infty}$ 收敛于x.

习题3. 考虑空间$L^p(\mathbb{R}^d)$，其中$0<p<\infty$. 证明如果对任意$f,g\in L^p$，$\|f+g\|_{L^p}\leq\|f\|_{L^p}+\|g\|_{L^p}$，则我们有$p\geq 1$.

习题4. 设(X,d)为紧度量空间，$f:X\to X$为连续映射，对任意$x,y\in X$，满足$d(f(x),f(y))\geq d(x,y)$. 证明：f 为一个等距映射，即对任意的$x,y\in X$，均有$d(f(x),f(y))=d(x,y)$.

提示. 若不然，存在$x,y\in X$，使得$d(f(x),f(y))>d(x,y)$. 我们来考虑$\{f^n(x)\}_{n=0}^{\infty}$，由于这个序列是紧集$X$上的一个无穷序列，它必然有收敛子列，记为$\{f^{n_i}(x)\}$. 通过再取子列我们可以得到$\{m_i\}$使得$\{f^{m_i}(x)\}$和$\{f^{m_i}(y)\}$均收敛. 我们不妨设$m_{i+1}-m_i\to\infty$, $i\to\infty$(思考：为什么？). 于是，当$i\to\infty$时，我们有

$$d(f^{(m_{i+1}-m_i)}(x),x)\leq d(f^{m_{i+1}}(x),f^{m_i}(x))\to 0, d(f^{(m_{i+1}-m_i)}(x),x)\leq d(f^{m_{i+1}}(x),f^{m_i}(x))\to 0.$$

记$l_i=m_{i+1}-m_i$，于是

$$f^{l_i}(x)\to x,\ f^{l_i}(y)\to y.$$

由x,y的定义，我们有

$$d(x,y)<d(f^{l_i}(x),d^{l_i}(y)),$$

让$i\to\infty$，我们有

$$d(x,y)<d(x,y),$$

矛盾.

习题5. 给定$0<p<1$. 设q定义为$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$(因而$q<0$). 设$f:\Omega\to[-\infty,\infty]$, $g:\Omega\to[-\infty,\infty]$为两个可测函数，满足

$$\int_\Omega |f(x)|^p dx<\infty,\ 0<\int_\Omega |g(x)|^q dx<\infty.$$

证明下面的反Hölder不等式：

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|dx\geq (\int_\Omega |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}(\int_\Omega |g(x)|^q dx)^{\frac{1}{q}},$$

这个不等式的左边可能为∞.

习题6. 课本P13 1.2.4.

注记7. 关于本题参考书上解答的几点说明：

1. 答案找到一列P_m，$P_m(x) \to e^x$，e^x不是多项式. 这时实际上要注意到我们实际上需要说明不存在多项式$P(x)$，使得$\int_0^1 |e^x - P(x)|dx = 0$. 这需要利用到数学分析中一个经典例题：如果$f(x) \geq 0$非一个非恒为零的连续函数，则$\int_0^1 f(x)dx > 0$. 所以$f_n(x) = x^n$这个例子是不适用的，因为我们取$f(x) = 0$，不难得出$\rho(f_n, f) \to$，$n \to \infty$. 这时按$\rho$的极限不一定是逐点极限. 但在完备化空间，这两个极限函数视为等同.

2. 答案上认为完备化空间为$C[a, b]$，这个不正确，应为$L^1[a, b]$.

习题8. 你对泛函分析这门课的教学有没有什么好的建议，你觉得上课的节奏是否适当，还是需要加快或减慢？你对后面的内容有什么期待或意见么？

习题9 (附加题)**.** 设函数$f \in C([0, 1] \times \mathbb{R})$，满足存在常数$0 \leq \gamma < 8$，使得对任意$0 \leq x \leq 1$, $u, v \in \mathbb{R}$有

$$|f(x, u) - f(x, v)| \leq \gamma |u - v|$$

又设$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ 为两个常数. 则两点边值问题

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x, u(x)), \qquad 0 < x < 1, \\ u(0) &= \alpha, \ u(1) = \beta \end{aligned}$$

有且仅有一个解$u \in C[0, 1] \cap C^2(0, 1)$.

提示. 我们可以分下面三步讨论：

(i) 如果$u \in C[0, 1] \cap C^2(0, 1)$是边值问题的解，则$u \in C^2[0, 1]$.

(ii) 如果$u \in C^2[0, 1]$是边值问题的解，则u也是积分方程

$$u(x) = \alpha(1 - x) + \beta x + \int_0^1 G(x, \xi) f(\xi, u(\xi)) d\xi, \ 0 \leq x \leq 1$$

的解，这里$G \in C([0, 1] \times [0, 1])$定义为

$$G(x, \xi) := \begin{cases} \xi(1 - x), & 0 \leq \xi \leq x \leq 1, \\ x(1 - \xi), & 0 \leq x < \xi \leq 1. \end{cases}$$

反之，如果$u \in C[0, 1]$是上述积分方程的解，则$u \in C^2[0, 1]$，且u是边值问题的解.

(iii) 在空间$C[0,1]$ 上赋予sup度量，我们定义映射$F:C[0,1]\to C[0,1]$为

$$F(v)(x)=\alpha(1-x)+\beta x+\int_0^1 G(x,\xi)f(\xi,u(\xi))d\xi,\ 0\le x\le 1.$$

F是一个压缩映射.