习题2

截止时间：3月25日

习题1. 证明当$p \geq 1$时，l^p是可分的.

提示. 考查所有形如$x_\epsilon = (\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_N, 0, 0, \cdots)$, $\gamma_i \in \mathbb{Q}$, $i = 1, \cdots, N$构成的集合

习题2. 设E是一个赋范线性空间，$\{O_n\}$为其内的一列递减开球，$O_1 \supset O_2 \supset O_3 \supset \cdots \supset O_n \supset O_{n+1} \supset \cdots$. 那么，只要球$O_n$的"直径"$d(O_n) = \sup_{x,y\in O_n} \|x-y\| \nrightarrow 0 (n \to \infty)$，则有$\cap_n O_n \neq \emptyset$.

提示 我们知道存在d使得$d(O_n) \to d$(为什么？). 取n_0使得球O_{n_0}的直径$d(O_{n_0}) < \frac{5}{4} d_0$，我们令$O_0$为与$O_{n_0}$同心的以$\frac{d}{2}$为直径的球，如果对$n \geq n_0$，有$O_0 \not\subseteq O_n$，则$O_n$的直径需要满足什么条件？(再提示: 可以证明这时$O_n$的直径不大于$\frac{7}{8}d$. 于是当$n \geq n_0$时，有$O_0 \not\subseteq O_n$，从而得出结论).

习题3. 如果上题我们要求E是一个Banach空间，O_n满足上题的条件但不要求是开球(例如有界闭(凸)集)，这时结论是否依然成立？若成立，请给出证明. 若不成立，请给出一个反例.

提示. 取$C[0,1]$上的函数列x_n如下：

$$x_n = \begin{cases} 1 - nt, & 0 \leq t \leq \frac{1}{n}, \\ 0, & \frac{1}{n} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

定义$V_n(t) = \{x(t) \in C[0,1] | 0 \leq x(t) \leq x_n(t), x(0) = 1\}$.

习题4. 设$\{x_n\} \subset C[0,1]$为等度连续的函数列. 如果存在$p_0 \geq 1$，使得存在$x_0 \in C[0,1]$，满足当$n \to \infty$时，有

$$\int_0^1 |x_n(t) - x_0(t)|^{p_0} dt \to 0.$$

那么在$C[0,1]$的通常范数下，是否有$x_n \to x_0$？

提示. 首先我们由$\int_0^1 |x_n(t)-x_0(t)|^{p_0}dt \to 0$可推出$\int_0^1 |x_n(t)-x_0(t)|dt \to 0 (n\to\infty)$. 然后注意到$\{x_n(t)-x_0(t)\}$也是等度连续的，于是对任意$\epsilon>0$，存在$\delta>0$，使得一致地有

$$|[x_n(t')-x_0(t)]-[x_n(t'')-x_0(t'')]|<\frac{\epsilon}{2},$$

$$|t'-t''|\le\delta,\ \forall t',t''\in[0,1]\ (n=1,2,\cdots).$$

最后，由$n\ge N$，$\|x_n-x_0\|_{L^1}=\int_0^1|x_n(t)-x_0(t)|dt\le\epsilon\cdot\frac{\delta}{2}$. 由反证法我们可以证明

$$\sup_{t\in[0,1]}|x_n(t)-x_0(t)|\le\epsilon.$$

习题5. 我们讲到对于一个B^*空间，若其单位球面时列紧的，则其必是有限维的. 这个结论对F^*空间是否成立？

提示 参看讲义第五讲后的习题.

习题6. 课本P40 1.4.7

习题7. 你觉得上课的速度是快了还是慢了？希望证明讲的细一点还是讲明思路，细节大家自己去看？你课后每周会大概有多少时间可以来复习和预习？

习题8 (附加题)**.** 设(X,d)为紧度量空间，$f:X\to X$为满射，且对任意$x,y\in X$，满足$d(f(x),f(y))\le d(x,y)$. 证明：对任意的$x,y\in X$，均有$d(f(x),f(y))=d(x,y)$.