

## 习题4

截止时间：5月29日

习题1. 课本习题2.3.3

习题2. 课本习题2.3.7

习题3. 课本习题2.4.6

习题4. 课本习题2.4.7

习题5. 课本习题2.4.8

习题6. 证明存在 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 上的所有有界函数构成的线性空间上的一个线性泛函 $f \mapsto I(f)$ , 满足:

- (1) 若对任意 $x \geq 0$ 有 $f(x) \geq 0$ , 则 $I(f) \geq 0$ ;
- (2) 对实数 $\alpha$ 和 $\beta$ 我们有 $I(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha I(f_1) + \beta I(f_2)$ ;
- (3) 若 $f$ 可测, 则 $I(f) = \int_0^1 f(x) dx$ ;
- (4) 对任意 $h \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , 有 $I(f_h) = I(f)$ , 其中 $f_h(x) = f(x - h)$ .

其中(3)中式子右边的积分是通常的Lebesgue积分.

提示. 对集合 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ , 记 $M_A(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}} (\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N f(x + a_j))$ , 以及

$$q(f) = \inf_A \{M_A(f)\},$$

其中下界是关于所有的有限集 $A$ .