

# 信息论期中考试试题

截止时间：11月5日12时

**习题1.** 考虑定义在 $\{1, 2, 3, \dots\}$ 上的随机变量 $X$ ,  $EX = 2$ .

(1) 证明 $H(X) \leq 2$ .

(2)  $X$ 服从什么分布时, 上式等号成立, 即 $H(X) = 2$ ?

**习题2.** 设 $X$ 是取值非负整数值的随机变量, 对固定的值 $A > 0$ , 试求在约束条件

$$EX = \sum_{n=0}^{\infty} np(n) = A$$

下使得熵 $H(X)$ 达到最大时的概率密度函数 $p(x)$ , 并求出 $H(X)$ 的最大值.

**习题3.** 设 $X_1, X_2, \dots$ 为独立同分布的随机变量序列, 熵为 $H(X)$ . 记

$$C_n(t) = \{x^n \in \mathcal{X}^n : p(x^n) \geq 2^{-nt}\}.$$

1. 证明 $|C_n(t)| \leq 2^{nt}$ .

2. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X^n \in C_n(t))$ .

**习题4.** 满足后缀条件的编码指无一码字是其他任何码字的后缀. 试证明满足后缀条件的编码是唯一可译的, 并证明满足后缀条件的所有编码的最小平均码长等于该随机变量的赫夫曼码的平均长度.

**习题5.** 设 $0 < r < 1$ , 考虑取值于 $0 \leq x \leq e^{-1}$ 上的一个随机变量, 其概率密度函数为

$$f_r(x) = C_r \frac{1}{x(-\ln x)^{r+1}}.$$

求其微分熵.

**习题6.** 一只小鸟在 $3 \times 3 \times 3$ 的立方体迷宫中迷失了. 这只鸟在相互邻接的房间之间, 从这个房间飞到另一个房间的概率是相同的. 例如, 角落边的房间有三个出口. 那么该随机游动的熵率是多少?

**习题7.** 记 $\pi(n)$ 为不超过 $n$ 的素数个数. 注意到对于任一正整数 $n$ , 其有唯一的形如下的素因子分解

$$n = \prod_{i=1}^{\pi(n)} p_i^{X_i}.$$

其中 $p_1, p_2, p_3, \dots$ 为素数. 即 $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \dots$ .  $X_i = X_i(n)$ 为一个非负整数, 其表示 $n$ 的素因子分解中 $p_i$ 的重数. 设 $N$ 为在 $\{1, 2, \dots, n\}$ 上均匀分布的一个随机变量.

(1) 证明 $X_i(N)$ 为一个整数值随机变量, 满足

$$0 \leq X_i(N) \leq \log n.$$

(2) 证明 $\log n = H(N) \leq \pi(n) \log(\log n + 1)$ . 从而 $\pi(n) \geq \frac{\log n}{\log(\log n + 1)}$ . 特别地当 $n \rightarrow \infty$ 时有 $\pi(n) \rightarrow \infty$ .

**习题8.** 设有两个以 $P_1$ 和 $P_2$ 为转移矩阵的 $n$ 元信道, 信道容量分别为 $C_1$ 和 $C_2$ . 现在考虑以 $P_1 P_2$ 为转移矩阵的 $n$ 元信道, 如果其信道容量为 $C$ , 证明 $C \leq \min(C_1, C_2)$ .