

习题1

2020年2月16日

习题1. 课本P9 1.1.5

习题2. 课本P13 1.2.3

习题3. 设 p 为一个素数, 定义 \mathbb{Q} 上的 p -adic范数如下: 若 $r = 0$, 则定义 $\|r\|_p = 0$, 否则 r 可以唯一表示成 $r = p^k \frac{m}{n}$ 的形式, 并定义 $\|r\|_p = p^{-k}$, 其中 $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ 相互互素, 且均与 p 互素.

(1) 证明 $\|r_1 r_2\|_p = \|r_1\|_p \|r_2\|_p$;

(2) 证明 $\|r_1 + r_2\|_p \leq \max\{\|r_1\|_p, \|r_2\|_p\}$;

(3) 如果 $\|r_1\|_p < \|r_2\|_p$, 则 $\|r_1 + r_2\|_p = \|r_2\|_p$;

(4) 定义 $d_p(r_1, r_2) = \|r_1 - r_2\|_p$, 那么 (\mathbb{Q}, d_p) 是一个度量空间;

(5) 说明 (\mathbb{Q}, d_p) 不是完备的. 我们记 \mathbb{Q}_p 为其完备化.

(6) 证明 \mathbb{Q} 上的算术运算可以延拓到 \mathbb{Q}_p 上, 于是 \mathbb{Q}_p 构成了一个域, 称为 p -adic数域.

习题4. 设 (X, d) 为完备距离空间, T 为拓扑空间, $(f_t)_{t \in T}$ 为一族满足下述性质的映射 $f_t : X \rightarrow X$, 满足对每个 $x \in X$, 映射 $t \in T \rightarrow f_t(x) \in X$ 是连续的, 而且存在常数 k , $0 < k < 1$, 使得对任何 $x, y \in X$ 和 $t \in T$,

$$d(f_t(x), f_t(y)) \leq kd(x, y).$$

对每个 $t \in T$, 用 $x_t \in X$ 表示映射 f_t 的唯一的不动点. 证明映射 $t \in T \rightarrow x_t \in X$ 是连续的.