习题1部分解答与提示

2020 年 2 月 24 日

3. (1)-(4) 可以按照定义直接证明.

对于(5)，可以验证级数$\sum_{i=-k}^{+\infty} a_i p^i$，$0 \leq a_i \leq p-1$ 在$\mathbb{Q}_p$ 中收敛. 而每一个有理数都可以表示成$\sum_{i=-k}^{+\infty} a_i p^i$的形式. 我们可以验证若存在$j$，$a_j \neq b_j$，那么$\sum_{i=-k}^{+\infty} a_i p^i \neq \sum_{i=-k}^{+\infty} b_i p^i$. 我们知道这样的数有不可数多个，但有理数是可数的.

对于(6)，设$x, y \in \mathbb{Q}_p$，那么存在$(\mathbb{Q}, d_p)$中的Cauchy列(x_n)和(y_n)，使得它们是x和y的代表元，我们可以验证$(x_n + y_n), (x_n y_n)$也是Cauchy 列，从而我们可以定义它们对应的等价类就是x和y的和与积. 此外我们还要验证这个定义与代表元的选取无关. 此外若$x \neq 0$，可以证明$(1/x_n)$也是一个Cauchy列(利用等式$\|1/x - 1/x'\|_p = \|x - x'\|_p \|x\|_p \|x'\|_p$)，从而可以定义其对应的等价类就是$x$的逆. 由此我们知$\mathbb{Q}$在上面定义的运算下构成了一个域.

4. 固定$t \in T$. 由于映射$t \in T \to f_t(x) \in X$是连续的，所以对于任意$\epsilon > 0$，存在$\delta > 0$ 使得对任意$s \in T$，如果$|s - t| < \delta$，那么$|f_t(x_t) - f_s(x_t)| < \epsilon(1 - k)$. 所以我们有

$$d(x_t, x_s) \leq d(f_t(x_t), f_s(x_t)) + d(f_s(x_s), f_s(x_t)) < (1 - k)\epsilon + k\epsilon = \epsilon.$$

所以映射$t \in T \to x_t \in X$是连续的.