作业1

截止时间：五月十七日

习题1. 设$(\mathscr{X},\rho)$是度量空间，F_1,F_2是它的两个紧子集，求证$\exists x_i\in F_i(i=1,2)$，使得$\rho(F_1,F_2)=\rho(x_1,x_2)$，其中

$$\rho(F_1,F_2):=\inf\{\rho(x,y)|x\in F_1,y\in F_2\}.$$

习题2. 设(X,d)为完备度量空间，T为拓扑空间，$(f_t)_{t\in T}$为一族满足下述性质的映射$f_t:X\to X$，满足对每个$x\in X$，映射$t\in T\to f_t(x)\in X$是连续的，而且存在常数k，$0<k<1$，使得对任何$x,y\in X$和$t\in T$，

$$d(f_t(x),f_t(y))\leq kd(x,y).$$

对每个$t\in T$，用$x_t\in X$表示映射f_t的唯一的不动点. 证明映射$t\in T\to x_t\in X$是连续的.

习题3. 设X是一个赋范线性空间. 对于$r>0$，证明X同胚于开球$U(0,r)=\{x\in X:\|x\|<r\}$.

习题4. 证明赋范线性空间$\mathscr{X}\neq\{0\}$是Banach空间当且仅当$S=\{x\in X:\|x\|=1\}$是完备的.