作业2

截止时间：五月二十四日

习题 1. 设$\mathscr{X}$是B*空间. 求证：$\mathscr{X}$是Banach空间，必须且仅须对$\forall\{x_n\}\subset\mathscr{X}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|<\infty\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}x_n$收敛.

习题 2. 设E是一个赋范线性空间，$C\subset E$是一个凸集. 证明：C的闭包$\overline{C}$和C的内点$\mathrm{Int}(C)$均为凸集.

习题 3. 设$\{x_n\}$是内积空间$\mathscr{X}$中的一列元素，$(\cdot,\cdot)$为其上的内积，其诱导了一个范数$\|\cdot\|$. 求证：如果$(x_n,x)\to(x,x)$且$\|x_n\|\to\|x\|$，那么$x_n\to x$.

习题 4. 设函数$f\in C([0,1]\times\mathbb{R})$，满足存在常数$0\le\gamma<8$，使得对任意$0\le x\le 1$，$u,v\in\mathbb{R}$有

$$|f(x,u)-f(x,v)|\le\gamma|u-v|$$

又设$\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ 为两个常数. 则两点边值问题

$$\begin{aligned}-u''(x)&=f(x,u(x)),\qquad 0<x<1,\\ u(0)&=\alpha,\ u(1)=\beta\end{aligned}$$

有且仅有一个解$u\in C[0,1]\cap C^2(0,1)$.

提示. 我们可以分下面三步讨论：

(i) 如果$u\in C[0,1]\cap C^2(0,1)$是边值问题的解，则$u\in C^2[0,1]$.

(ii) 如果$u\in C^2[0,1]$是边值问题的解，则u也是积分方程

$$u(x)=\alpha(1-x)+\beta x+\int_0^1 G(x,\xi)f(\xi,u(\xi))d\xi,\ 0\le x\le 1$$

的解，这里$G\in C([0,1]\times[0,1])$定义为

$$G(x,\xi):=\begin{cases}\xi(1-x), & 0\le\xi\le x\le 1,\\ x(1-\xi), & 0\le x<\xi\le 1.\end{cases}$$

反之，如果$u\in C[0,1]$是上述积分方程的解，则$u\in C^2[0,1]$，且u是边值问题的解.

(iii) 在空间$C[0,1]$ 上赋予sup范数，得到了一个Banach空间. 我们定义映射$F: C[0,1] \to C[0,1]$为

$$F(v)(x) = \alpha(1-x) + \beta x + \int_0^1 G(x,\xi) f(\xi, u(\xi)) d\xi,\ 0 \leq x \leq 1.$$

F是一个压缩映射.