作业4

截止时间：六月七日

习题 1. 设$\mathscr{X}$是一个实内积空间. 证明$\|x+y\|^2 = \|x\|^2+\|y\|^2$蕴含$x\perp y$. 若$\mathscr{X}$是复内积空间，情况会是如何？

习题 2. 设$f\in\mathscr{X}^*$，求证：对任意$\epsilon>0$，存在$x_0\in\mathscr{X}$，使得$f(x_0)=\|f\|$，且$\|x_0\|<1+\epsilon$.

习题 3. 设$\mathscr{X},\mathscr{Y},\mathscr{Z}$是三个Hilbert空间，设$T\in\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Z})$以及$S\in\mathscr{L}(\mathscr{Y},\mathscr{Z})$. 设$\mathscr{R}(T)\subset\mathscr{R}(S)$，那么存在$R\in\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$使得$T=SR$.

习题 4. 设E,E_1,E_2为Banach空间；T_1为E到E_1的闭线性算子，T_2为E到E_2的闭线性算子，且$D(T_1)\subset D(T_2)$. 那么，必存在一个正常数β，使得对任意$x\in D(T_1)$，有

$$\|T_2(x)\|_{E_2}\le\beta(\|T_1(x)\|_{E_1}+\|x\|_E).$$

解答. 由T_1是闭线性算子，T_1的图像$G(T_1)$是成绩空间$E\times E_1$上的闭集，于是由课本定理2.3.14的注记，$G(T_1)$按图模$\|\cdot\|_G$是闭的，从而$G(T_1)$在范数

$$\|(x,y)\|=\|x\|_E+\|y\|_{E_1}=\|x\|_E+\|T_1(x)\|_{E_1} \tag{1}$$

下构成了一个Banach空间。

我们做一个从空间$G(T_1)$到E_2的算子A:

$$A[(x,T_1(x))]=T_2(x),\ \forall(x,T_1(x))\in G(T_1).$$

由T_1以及T_2的线性性，我们知A是一个线性算子. 下面我们来证明A是一个闭算子. 事实上，如果有序列$\{(x_n,T_1(x_n))\}\subset G(T_1)$，使得按对应的范数意义下，

$$(x_n,T_1(x_n))\to(x,T_1(x)),\ T_2(x_n)\to y\ (n\to\infty).$$

由假设，$\{x_n\}\subset D(T_1)\subset D(T_2)$，并由(1)，我们有

$$x_n\to x,\ T_2(x_n)\to y\ (n\to\infty).$$

利用T_2是闭算子我们知$x \in D(T_2)$以及$T_2(x) = y$. 从而

$$A[(x, T_1(x))] = T_2(x) = y.$$

从而A是一个闭线性算子.

由于$D(A) = G(T_1)$是第二纲集(为什么？). E_2是完备的，从而由闭图像定理，A是连续的，从而A有界，由此可得我们需要的结论. $\square$