习题 1. 设(X,d)为紧度量空间，$f:X\to X$为满射，对任意$x,y\in X$，满足$d(f(x),f(y))\le d(x,y)$. 证明：对任意的$x,y\in X$，均有$d(f(x),f(y))=d(x,y)$.

解答. 若不然，则存在$x,y\in X$，使得$d(f(x),f(y))<d(x,y)$. 固定x,y，取$\epsilon>0$使得$d(f(x),f(y))<d(x,y)-5\epsilon$. 设$n$为一个自然数，满足$X$存在一个元素个数为$n$的$\epsilon$-网. 记$N\subset X^n$ 为$N=\{(x_1,\cdots,x_n)|\{x_1,\cdots,x_n\}$为$X$的$\epsilon-$网$\}$. 那么$N$是$X^n$中的闭子集，由$X^n$紧知$N$也是紧的. 定义$D:X^n\to\mathbb{R}$，满足

$$D(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i,j}^n d(x_i,x_j).$$

由D是连续的，我们知其在N上取最小值. 我们记S为最小值点. 注意到由f的定义可知$f(S)\in N$. 同时由于$D(f(S))\le D(S)$，我们有$D(f(S))=D(S)$，以及对任意i,j有$d(f(x_i),f(x_j))=d(x_i,x_j)$.

另一方面，我们有存在i,j，使得$d(x,x_i)\le\epsilon$, $d(x,x_j)\le\epsilon$. 于是

$$d(x_i,x_j)\ge d(p,q)-d(p,x_i)-d(p,x_j)\ge d(p,q)-2\epsilon.$$

同时

$$d(f(x_i,x_j))\le d(f(p),f(q))+d(f(p),f(x_i))+d(f(p),f(x_j))\le d(f(p),f(q))+2\epsilon\le d(p,q)-3\epsilon.$$

从而$d(f(x_i),f(x_j))<d(x_i,x_j)$，矛盾. □

习题 2. 设(X,d)为紧度量空间，$f:X\to X$为连续映射，对任意$x,y\in X$，满足$d(f(x),f(y))\ge d(x,y)$. 证明：f 为一个等距映射，即对任意的$x,y\in X$，均有$d(f(x),f(y))=d(x,y)$.

解答. 若不然，存在$x,y\in X$，使得$d(f(x),f(y))>d(x,y)$. 我们来考虑$\{f^n(x)\}_{n=0}^\infty$，由于这个序列是紧集X上的一个无穷序列，它必然有收敛子列，记为$\{f^{n_i}(x)\}$. 通过再取子列我们可以得到$\{m_i\}$使得$\{f^{m_i}(x)\}$和$\{f^{m_i}(y)\}$均收敛. 我们不妨设$m_{i+1}-m_i\to\infty$, $i\to\infty$(思考：为什么？). 于是，当$i\to\infty$时，我们有

$$d(f^{(m_{i+1}-m_i)}(x),x)\le d(f^{m_{i+1}}(x),f^{m_i}(x))\to 0, d(f^{(m_{i+1}-m_i)}(x),x)\le d(f^{m_{i+1}}(x),f^{m_i}(x))\to 0.$$

记$l_i=m_{i+1}-m_i$，于是

$$f^{l_i}(x)\to x,\ f^{l_i}(y)\to y.$$

由x,y的定义，我们有

$$d(x,y)<d(f^{l_i}(x),d^{l_i}(y)),$$

让$i \to \infty$，我们有

$$d(x,y) < d(x,y),$$

矛盾. $\square$

习题 3. 设$E = \{\sin nt\}_{n=1}^{\infty}$，求证$E$在$C[0,\pi]$中不是列紧的.

解答. 只要证明E不是等度连续的.

设$\epsilon_0 = 1$，对任意$\delta > 0$取$k \in \mathbb{N}$使得$\frac{1}{k} < \delta$，$n_k = 2k$，$t_k = \frac{\pi}{4k} \in [0,\pi]$，$t_0 = 0$. 于是$|t_k - 0| = \frac{\pi}{4k} < \frac{1}{k} < \delta$且$|\sin n_k \cdot t_k - \sin n_k \cdot 0| = \sin \frac{pi}{2} = 1 = \epsilon_0$. 所以$E$不是等度连续的. $\square$

习题 4. 设$\{e_n\}, \{f_n\}$是 Hilbert 空间 $\mathscr{X}$ 中的两个规范正交集，满足条件

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|e_n - f_n\|^2 < \infty.$$

求证：$\{e_n\}$和$\{f_n\}$两者中一个完备蕴含另一个完备.

解答. 假设$\{e_n\}$完备. 首先注意到$|(e_j - f_j, e_i)| = |(e_i - f_i, f_j)|$. 从而

$$\begin{aligned}
\sum_j \|e_j - f_j\|^2 &= \sum_j \sum_i |(e_i - f_i, f_j)|^2 \\
&= \sum_i \sum_j |(e_i - f_i, f_j)|^2 \\
&\leq \sum_i \|e_i - f_i\|^2.
\end{aligned}$$

从而$\|e_i - f_i\|^2 = \sum_j |(e_i - f_i, f_j)|^2$. 于是$\sum_j (e_i - f_j, f_j) f_j = e_i - f_i$，从而$e_i = \sum_j (e_i, f_j) f_j$. 从而$e_i \in \operatorname{span}\{f_j\}$，从而$\{f_j\}$完备. $\square$

习题 5. 设X是一个无限维的Hilbert空间，问其上是否所有线性泛函都是连续的？说明理由.

解答. 从X的线性基中取一组可数子集$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$，定义X上的线性泛函l满足对任意$n \in \mathbb{N}$有$l(e_n) = n\|e_n\|$. 不难验证l是无界的. $\square$

习题 6. 是否存在函数$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，使得$f$的连续点集是有理数全体?

解答. 定义f在点x处的震荡

$$osc_f(x) = \inf_{\epsilon > o} \operatorname{diam}(f(B_\epsilon(x))),$$

于是f在点x处连续当且仅当$osc_f(x) = 0$. 对于$c > 0$，我们可以证明（思考）集合$\{x \in X | osc_f(x) < c\}$是一个开集，且$f$的连续点集可以表示为$\cap_{n \geq 1}\{x \in X | osc_f(x) < \frac{1}{n}\}$. 从而$f$的连续点集是一个$G_\delta$集.

由Baire定理我们知$\mathbb{Q}$不可能是一个G_δ集，实际上我们要用到Baire定理的等价形式：可数个稠密G_δ集的交还是G_δ集. 从而这样的f不存在. □

习题 7. 设E是 $[0,1]$ 上的一个Lebesgue可测集，是否一定存在着一个 E的G_δ子集F使得E和 F具有相同的 Lebesgue 测度？

解答. 否. 令E_n为$[0,1]$中测度为$1-\frac{1}{n}$的(胖)Cantor集，$E=\cup_{n=1}^{\infty}E_n$. 则E为第一纲集，且$\mu(E)=1$. 若存在G_δ集F和零测集A，使得$E=F\cup A$(不交并)，则$E^c=F^c\cap A^c$，于是$F^c=E^c\cup A$也是一个零测集. 注意到F^c为F_σ集，从而其具有形式$F^c=\cup_{n=1}^{\infty}F_n$，其中$F_n$是闭集. 于是$\mu(F_n)=0$. 从而$F_n$是无处稠密的，从而$F^c$是第一纲集. 这样$[0,1]=F\cup F^c$也是第一纲集，矛盾. □

习题 8. 设E,E_1,E_2为Banach空间；T_1为E到E_1的闭线性算子，T_2为E到E_2的闭线性算子，且$D(T_1)\subset D(T_2)$. 那么，必存在一个正常数β，使得对任意$x\in D(T_1)$，有

$$\|T_2(x)\|_{E_2}\le\beta(\|T_1(x)\|_{E_1}+\|x\|_E).$$

解答. 由T_1是闭线性算子，T_1的图像$G(T_1)$是成绩空间$E\times E_1$上的闭集，于是由课本定理2.3.14的注记，$G(T_1)$按图模$\|\cdot\|_G$是闭的，从而$G(T_1)$在范数

$$\|(x,y)\|=\|x\|_E+\|y\|_{E_1}=\|x\|_E+\|T_1(x)\|_{E_1} \tag{1}$$

下构成了一个Banach空间。

我们做一个从空间$G(T_1)$到E_2的算子A:

$$A[(x,T_1(x))]=T_2(x),\ \forall(x,T_1(x))\in G(T_1).$$

由T_1以及T_2的线性性，我们知A是一个线性算子. 下面我们来证明A是一个闭算子. 事实上，如果有序列$\{(x_n,T_1(x_n))\}\subset G(T_1)$，使得按对应的范数意义下，

$$(x_n,T_1(x_n))\to(x,T_1(x)),\ T_2(x_n)\to y\ (n\to\infty).$$

由假设，$\{x_n\}\subset D(T_1)\subset D(T_2)$，并由(1)，我们有

$$x_n\to x,\ T_2(x_n)\to y\ (n\to\infty).$$

利用T_2是闭算子我们知$x\in D(T_2)$以及$T_2(x)=y$. 从而

$$A[(x,T_1(x))]=T_2(x)=y.$$

从而A是一个闭线性算子.

由于$D(A)=G(T_1)$是第二纲集(为什么？). E_2是完备的，从而由闭图像定理，A是连续的，从而A有界，由此可得我们需要的结论. □

习题 9. 如果$\{f_n\}$为定义在第二纲赋范线性空间E上的一列连续线性泛函，并且对任意$x \in E$，极限 $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$均存在，试证明$f$也是$E$上的连续线性泛函.

解答. 记(c)为收敛数列全体构成的线性空间，考虑从E到(c)内的线性算子T : $T(x) = (f_1(x), f_2(x), \cdots)$. 容易验证其为闭算子，从而由闭图像定理知$T$为连续线性算子. 因此由$(c)$空间收敛的定义可以导出本题的结论. □

习题 10. 设X和Y是Banach空间. 如果$T : X \to Y$为线性映射，满足对任意$f \in Y^*$有$f \circ T \in X^*$，证明T是连续的.

解答. 定义 $T^* : Y^* \to X^*$: $T^*f = f \circ T$, 对任意$x \in X$，我们定义$\hat{x} : X^* \to \mathbb{C}$为$\hat{x}(x^*) = x^*(x)$. 若$x \in X$满足$\|x\| = 1$. 由Hahn-Banach定理，存在$g \in Y^*$ 满足 $\|g\| = 1$ 满足

$$\|Tx\| = g(Tx) \leq \sup_{f\in Y^*, \|f\|=1} |f(Tx)| = \sup_{f\in Y^*, \|f\|=1} |(T^*f)(x)| = \sup_{f\in Y^*, \|f\|=1} |(\hat{x}T^*)(f)| = \|\hat{x}\circ T^*\|.$$

注意到对任意$f \in Y^*$，有

$$\sup_{\|x\|=1} |\hat{x} \circ T^*(f)| = \sup_{\|x\|=1} |f \circ T(x)| = \|f \circ T\| < \infty.$$

由一致有界定理，存在常数$M > 0$，使得$\sup_{\|x\|=1} \|\hat{x} \circ T^*\| \leq M$. 于是，由于对任意$x \in X$，$\|x\| = 1$，$\|Tx\| \leq \|\hat{x} \circ T^*\| \leq M$，我们知$T$是连续的. □

习题 11. 设X是线性空间，求证：为了M是X的极大线性子空间，必须且仅须$\dim(X/M) = 1$.

提示：M是极大线性子空间的充要条件是：M是真线性子空间，并且对任意$x_0 \in \mathscr{X} \setminus M$，有

$$X = \{\lambda x_0 | \lambda \in \mathbb{R}^1\} \oplus M.$$