B 卷参考答案

一、判断题

1-1. 错误. 反例：$\{(\frac{1}{n},\frac{3}{2})\}$.

1-2. 错误. 反例：$a_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

1-3. 正确. 利用可积性的定义.

1-4. 错误. 考虑 $[0,+\infty)$ 上的连续函数 $f(x)=x\cos^4 x$.

二、解答题

2-1. 首先

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}=3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3^{n+1}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}=3(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}-\frac{1}{3})-\frac{1}{2}.$$

我们有 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}=\frac{3}{4}$. 又

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}=3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}=3(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}-\frac{1}{3})-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}.$$

于是 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}=\frac{3}{2}$.

2-2. 化为极坐标 $r^2=a^2\sin 2\theta$，于是所求的面积是

$$S=4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}a^2\sin 2\theta d\theta=a^2.$$

2-3. $(\frac{2}{3}a,0,0)$.

三、证明题

3-1. 若一个序列非无穷大量，则其必有有界子列，这个有界子列中必存在收敛子列.

3-2. 由 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$ 可知 $f(0)=0$, $f'(0)=0$，于是

$$f(\frac{1}{n})\sim\frac{f''(0)}{2}\cdot\frac{1}{n^2}\ (n\to\infty),$$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f(\frac{1}{n})$ 绝对收敛.

四、综合题

(1) 由题设知，对任给 $\epsilon > 0$，下述反常积分是收敛的：

$$\int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{f(ax)}{x} dx = \int_{a\epsilon}^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx,\ \int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{f(bx)}{x} dx = \int_{b\epsilon}^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx.$$

因此，由中值定理可得

$$\begin{aligned}\int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x} dx &= \int_{a\epsilon}^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx - \int_{b\epsilon}^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx \\ &= \int_{a\epsilon}^{b\epsilon} \frac{f(x)}{x} dx,\ a\epsilon \le \xi \le b\epsilon.\end{aligned}$$

于是

$$I = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x} dx = \lim_{\epsilon\to 0} f(\xi) \ln \frac{b}{a} = f(0) \ln \frac{b}{a}.$$

(2) 我们有

$$\begin{aligned}I_{a,b} &= \int_a^b \frac{f(\alpha x)-f(\beta x)}{x} dx = \int_{\alpha a}^{\alpha b} \frac{f(t)}{t} dt - \int_{\beta a}^{\beta b} \frac{f(t)}{t} dt \\ &= \int_{\alpha a}^{\beta a} \frac{f(t)}{t} dt - \int_{\alpha b}^{\beta b} \frac{f(t)}{t} dt = [f(\xi') - f(\xi'')] \ln \frac{\beta}{\alpha},\end{aligned}$$

其中 $\xi' \in (\alpha a, \beta a)$，$\xi'' \in (\alpha b, \beta b)$. 由此立即知

$$\lim_{a\to 0,\ b\to+\infty} I_{a,b} = (L-M) \ln \frac{\beta}{\alpha}$$

.

(3) 令 $f(x) = 2\cos 2x - \frac{1}{2}\cos 4x$，则应用三角公式可得

$$\sin^4(\alpha x) - \sin^4(\beta x) = [f(\beta x) - f(\alpha x)]/4,$$

注意 $f \in C([0,+\infty))$，$\int_{\epsilon}^{+\infty} f(x)/x dx$ $(\epsilon > 0)$ 收敛. 故根据 (1) 知 $I = \frac{3}{8} \ln \frac{\alpha}{\beta}$.