

中山大学本科生期中考试

考试科目：《数学分析》（A 卷）

学年学期：2020 学年第 2 学期 姓 名：_____

学 院/系：数学学院 (珠海) 学 号：_____

考试方式：闭卷 年级专业：_____

考试时长：100 分钟 班 别：_____

警示 《中山大学授予学士学位工作细则》第八条：“考试作弊者，不授予学士学位。”

----- 以下为试题区域，共四道大题，总分 100 分，考生请在答题纸上作答 -----

一、判断题 (若认为正确，请简述理由即可，不用详细证明；若认为错误，举一个反例即可，不用具体解释. 共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分)

1-1. 设 $f(x)$ 为区间 $I \subset \mathbb{R}$ 上的连续函数，若 $f(x)$ 在 I 上有界，则 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续.

1-2. 设 $x_n \geq 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ ，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x_n$ 收敛.

1-3. 集合 $[0, 1] \cup [2, 3]$ 的任意 (开) 覆盖都存在一个有限子覆盖.

1-4. 若函数 $f: [a, b] \rightarrow [c, d]$ 与 $g: [c, d] \rightarrow [e, f]$ 在对应的有界闭区间上黎曼可积，则 $g(f(x))$ 也黎曼可积.

二、解答题 (共 3 小题，每小题 10 分，共 30 分)

2-1. 求由双曲抛物面 $z = x^2 - y^2$ 与平面 $x = 1, z = 0$ 所围成的立体的体积.

2-2. 判断广义积分 $\int_0^{\infty} \cos(x^3 - x) dx$ 是收敛还是发散.

2-3. 求曲线 $y = a \ln \frac{a^2}{a^2 - x^2}$ ($0 \leq x \leq b < a$) 的弧长.

三、证明题 (共 2 小题，每小题 15 分，共 30 分)

3-1. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积，且在 $[a, b]$ 上满足 $|f(x)| \geq m > 0$ (m 为常数)，证明 $\frac{1}{f(x)}$ 在 $[a, b]$ 上也可积.

3-2. 设 $f(x)$ 单调下降，且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ，证明：若 $f'(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续，则广义积分 $\int_0^{+\infty} f'(x) \cos^2 x dx$ 收敛.

四、综合题 (8+8+4=20 分)

设 $a_n > 0$, $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，试证明下列结论成立.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1 + a_n}$ 发散;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n}$ 发散;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^2}$ 收敛.