中山大学本科生期中考试

考试科目：《数学分析》（B 卷）

学年学期：2020 学年第 2 学期		姓　　名：	
学　院/系：数学学院 (珠海)		学　　号：	
考试方式：闭卷		年级专业：	
考试时长：100 分钟		班　　别：	

警示《中山大学授予学士学位工作细则》第八条：“考试作弊者，不授予学士学位。”

---------以下为试题区域，共四道大题，总分 100 分，考生请在答题纸上作答---------

一、判断题 (若认为正确，请简述理由即可，不用详细证明；若认为错误，举一个反例即可，不用具体解释. 共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分)

1-1. 点集 $B=\{\frac{1}{n}|n\in\mathbb{N}\}$ 的任意开覆盖都存在有限子覆盖.

1-2. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 也收敛.

1-3. 有界闭区间 $[a,b]$ 上的黎曼可积函数一定有界.

1-4. 设 $f\in C([a,\infty))$，且 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛，那么有 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$.

二、解答题 (共 3 小题，每小题 10 分，共 30 分)

2-1. 计算 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$.

2-2. 求曲线 $(x^2+y^2)^2=2a^2xy$ 所围成的图形的面积.

2-3. 求图形 $0\le x\le a$; $y^2\le 2px$ 绕 x 轴旋转所成旋转体的质心的坐标.

三、证明题 (共 2 小题，每小题 15 分，共 30 分)

3-1. 证明，一个数列如果不是无穷大量，就一定有收敛子列.

3-2. 设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有二阶连续导数，且 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$. 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f(\frac{1}{n})$ 绝对收敛.

四、综合题 (8+8+4=20 分)

(1) 设 $f\in C([0,\infty))$，若对任意的 $\epsilon>0$，$\int_\epsilon^{+\infty}f(x)/xdx$ 收敛，试证明对任意的 $a>0$，$b>0$ 有

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=f(0)\ln\frac{b}{a}.$$

(2) 设 $f\in C([0,\infty))$，若对任意的 $0<a<b$，$\int_a^b f(x)/xdx$ 收敛，若有

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=M,\ \lim_{x\to0+}f(x)=L,$$

试证明对任意的 $\alpha>0$，$\beta>0$ 有

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(\alpha x)-f(\beta x)}{x}dx=(L-M)\ln\frac{\beta}{\alpha}.$$

(3) 计算积分

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4(\alpha x)-\sin^4(\beta x)}{x}dx\ (\alpha>0,\ \beta>0)$$

.