动力系统引论

2022 年 4 月 23 日

目录

第 1 讲　引言

首先，我们来简单介绍一些后面常用的记号：

- $\mathbb{N}$ 正整数
- $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$
- $\mathbb{Z}$ 整数
- $\mathbb{Q}$ 有理数
- $\mathbb{R}$ 实数
- $\mathbb{C}$ 复数
- $\mathbb{R}^+$ 正实数
- $\mathbb{R}_0^+ = \mathbb{R}_0^+ \cup \{0\}$

1.1　点集拓扑学的基本知识回顾

1.1.1　拓扑空间

定义 1.1. 设 X 是一个点集. 称集族 $\mathbf{U} = \{U_\alpha\}$ 构成 X 的一个拓扑，如果下面条件成立：

1. $\mathbf{U}$ 中任意多元素的并仍然是 $\mathbf{U}$ 的一个元素。
2. $\mathbf{U}$ 中有限多元素的交仍然是 $\mathbf{U}$ 的一个元素。
3. 空集 $\emptyset$ 和全空间 X 均在 $\mathbf{U}$ 中。

$(X, \mathbf{U})$ 称为是一个拓扑空间。

$\mathbf{U}$ 中的集合 U_α 称为开集. 集合 C 称为是闭的，如果 $X \backslash C$ 是开集。

定义 1.2. 设 A 是 X 的一个子集. 我们定义 A 上的一个拓扑，使得 A 中的开集形如 $U \cap A$，其中 U 是 X 的开集，称之为 A 上的诱导拓扑。

开集族 $\Sigma = \{U_\alpha\}$ 称为是 $A \subset X$ 的开覆盖，如果 A 包含于 U_α 的并中。

定义 1.3. 设 X 是一个拓扑空间。$A \subset X$ 称为是紧的，如果 A 的任意覆盖存在有限子覆盖。

定义 1.4. 拓扑空间 X 是 Hausdorff 的，如果对于任意两点 $x_1, x_2 \in X$，存在两个开集 U_1 和 U_2 满足 $x_1 \in U_1$ 以及 $x_2 \in U_2$，使得 U_1 和 U_2 的交为空集。

定义 1.5. 设 X 和 Y 是拓扑空间，函数 $f:X\to Y$ 称为是连续的，如果对任意 Y 中的开集 U，其在 X 中的原像 $f^{-1}(U)$ 为一个开集。

定义 1.6. 拓扑空间 X 称为是连通的，如果其不能分解为其中两个非空开集的不交并。

定义 1.7. 拓扑空间 X 称为是道路连通的，如果对 X 中的任意两个点 a 和 b，存在连续映射 $f:[0,1]\to X$，满足 $f(0)=a$ 且 $f(1)=b$。

1.1.2 度量空间

定义 1.8. 设 $\mathscr{X}$ 是一个非空集. 称 $\mathscr{X}$ 为度量空间，是指在 $\mathscr{X}$ 上定义了一个双变量的实值函数 $\rho(x,y)$，满足下列三个条件：

(1) $\rho(x,y)\geq 0$，而且 $\rho(x,y)=0$，当且仅当 $x=y$；

(2) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$；

(3) $\rho(x,z)\leq\rho(x,y)+\rho(y,z)$ $(\forall x,y,z\in\mathscr{X})$.

这里 ρ 叫做 $\mathscr{X}$ 上的一个度量；以 ρ 为度量的度量空间 $\mathscr{X}$ 记做 $(\mathscr{X},\rho)$。

定义 1.9. 设 $(\mathscr{X},\rho)$ 是一个度量空间。设 $r>0, x\in\mathscr{X}$，我们定义以 x 为中心，r 为半径的开球为 $B(x,r)=\{y|\rho(x,y)<r\}$.。类似的，我们定义以 x 为中心，r 为半径的闭球为 $\overline{B}(x,r)=\{y|\rho(x,y)\leq r\}$. $A\subset X$ 称为 $\mathscr{X}$ 中的开集，如果对任意 $x\in A$，存在 $r>0$ 使得 $B(x,r)\subset A$。

习题 1.1. 一个度量空间如上定义的开集构成了其上的一个拓扑，于是一个度量空间在其度量诱导的拓扑下构成了一个拓扑空间。

定义 1.10. 度量空间 $(\mathscr{X},\rho)$ 中的一个子集 E 称为闭集，是指：$\forall\{x_n\}\subset E$，若 $x_n\to x_0$，则 $x_0\in E$。

习题 1.2. 度量空间 $(\mathscr{X},\rho)$ 中的一个子集 E 是闭集，当且仅当 $\mathscr{X}\backslash E$ 是开集。

命题 1.11. 上面的开集定义给出了度量空间 $(\mathscr{X},\rho)$ 的一个 *Hausdorff* 拓扑。

1.1.3 拓扑基

定义 1.12. 设 X 是一个拓扑空间. 称一族开集构成了 X 的一个拓扑基，如果 X 中的任意开集可以表示为 X 中若干个 (可以是无限多个) 开集的并。

定义 1.13. 一个拓扑空间称为是第二可数的，如果其有一个至多可数的拓扑基。

1.2 动力系统

离散动力系统：X 非空集合，$f : X \to X$ 映射

设 $n \in \mathbb{N}$，f 的 n 次迭代定义为 $f^n = f \circ \cdots \circ f(n$ 次)；其中 f^0 定义为 $f^0 = Id$。若 f 可逆，则记 $f^{-n} = f^{-1} \circ \cdots \circ f^{-1}(n$ 次)。我们记 $f^{n+m} = f^n \circ f^m$。于是当 f 可逆时 f 的所有迭代构成一个群。若 f 不可逆，则 f 的正向迭代构成一个半群。

连续动力系统：X 非空集合，$\{f^t : X \to X\}$ 单参数映射族，其中 $t \in \mathbb{R}$ (称为流) 或 $\mathbb{R}_0^+$ (称为半流)，满足 $f^{t+s} = f^t \circ f^s$ 以及 $f^0 = Id$。

对于流，f^t 可逆，且 $(f^t)^{-1} = f^{-t}$。

对于固定的 t_0 我们有 f^{t_0} 的迭代 $(f^{t_0})^n = f^{nt_0}$ 构成了一个离散动力系统。

对 $x \in X$，记 $O_f^+(x) = \cup_{t\geq 0}\{f^t(x)\}$ 为 x 的正向半轨，记 $O_f^-(x) = \cup_{t\leq 0}\{f^t(x)\}$ 为 x 的负向半轨。它们的并 $O_f(x) = O_f^+(x) \cup O_f^-(x) = \cup_t f^t(x)$ 称为 x 的轨道。

点 $x \in X$ 为一个周期 T $(T > 0)$ 的周期点，如果 $f^T(x) = x$，这时称 x 的轨道为一个周期轨。若对任意 t 有 $f^t(x) = x$，那么称 x 为一个不动点。若 x 是非不动的周期点，则称 $t = \min\{t : f^t(x) = x\}$ 为 x 的最小周期。$x \in X$ 称为终于周期的，如果存在 $s > 0$，使得 $f^s(x)$ 是周期的。

习题 1.3. 证明对于可逆系统，终于周期点是周期点。

设 $A \subset X, t > 0, A$ 在 f^t 下的像记为 $f^t(A)$. A 在 f^t 下的原像记为 $f^{-t}(A)$, 即 $f^{-t}(A) = (f^t)^{-1}(A) = \{x \in X : f^t(x) \in A\}$。我们有 $A \subset f^{-t}(f^t(A))$. 若 f 可逆，上式取等号，若 f 不可逆，等号一般不成立。

$A \subset X$ 称为 f-不变的，如果对任意 t 有 $f^t(A) \subset A$。A 称为正向 f-不变的，如果对任意 $t \geq 0$ 有 $f^t(A) \subset A$。A 称为负向 f-不变的，如果对任意 $t \leq 0$ 有 $f^t(A) \subset A$。

设 $f^t : X \to X$，$g^t : Y \to Y$ 为两个动力系统，满射 $\pi : Y \to X$ 称为 (Y, g) 到 (X, f) 的半共轭，如果对任意 t，有 $f^t \circ \pi = \pi \circ g^t$。这时我们称 (X, f) 是 (Y, g) 的一个因子，(Y, g) 是 (X, f) 的一个扩充。若 π 可逆，则称 π 为一个共轭或同构。

例 1.14 (直积). 设 $f_i^t : X_i \to X_i$, $i = 1, 2$ 是两个动力系统。我们定义它们的直积为 $(f_1 \times f_2)^t : X_1 \times X_2 \to X_1 \times X_2$ $(x_1, x_2) \mapsto (f_1^t(x_1), f_2^t(x_2))$.

$X_1 \times X_2$ 到 X_1 或 X_2 的投影是一个半共轭，所以 (X_1, f_1) 和 (X_2, f_2) 是 $(X_1 \times X_2, f_1 \times f_2)$ 的一个因子。

例 1.15 (斜积). 若因子映射 $\pi : Y \to X$ 满足 $Y = X \times F$，且 π 为向第一个分量的投影，则称这样一个结构为斜积。Y 称为是 X 上关于 π 的一个纤维丛。

第 2 讲　圆周上的动力系统

2.1　圆周旋转

记 $S^1 = [0,1]/\sim$，其中 $0 \sim 1$. 在模 1 加法下，S^1 构成了一个 Abel 群。我们可以定义其上的一个度量

$$d(x,y) = \min(|x-y|, 1-|x-y|).$$

$[0,1]$ 上的 Lebesgue 测度诱导了 S^1 上的一个测度，也叫做 S^1 上的 Lebesgue 测度。

S^1 也可以描绘为 $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$，其中群作用由复数乘法给出。这两种不同的定义可以由映射 $z = e^{2\pi i x}$ 联系起来。

我们一般采用加法形式的陈述。

对 $\alpha \in \mathbb{R}$，定义 $R_\alpha : S^1 \to S^1$，满足 $R_\alpha x = x + \alpha \pmod 1$。则 $\{R_\alpha : \alpha \in [0,1)\}$ 是一个交换群，群运算由复合运算所定义：$R_\alpha \circ R_\beta = R_\gamma$，其中 $\gamma = \alpha + \beta \pmod 1$。

R_α 是一个等距：R_α 保持距离不变。同时其也保持 Lebesgue 测度 λ 不变：$\lambda(A) = \lambda(R_\alpha^{-1}A)$。

若 $\alpha = p/q$ 为有理数，则 $R_\alpha^q = Id$，于是所有轨道都是周期轨。若 α 是无理数，则任意正半轨在 S^1 中稠密：

命题 2.1. *若 α 是无理数，则 R_α 的任意正半轨在 S^1 中稠密。*

证明. 由鸽巢原理，我们知对任意 $\epsilon > 0$，存在自然数 $m, n < \frac{1}{\epsilon}$ 使得 $m < n$ 且 $d(R_\alpha^m x, R_\alpha^n x) < \epsilon$。则 $d(R_\alpha^{n-m} x, x) < \epsilon$，即 x 在 R_α^{n-m} 下的轨道是 ϵ-稠密的，从而 x 在 R_α 下的轨道也是 ϵ-稠密的。由 ϵ 的任意性，我们有 x 的正半轨道在 S^1 中稠密。 □

定义 2.2. 若一个动力系统没有非空的闭不变真子集，则称其为极小的。

后面，我们会证明 S^1 的任意可测 R_α-不变子集或是零测集，或是全测集。具有这样性质的可测动力系统称为是遍历的。

例 2.3. *拓扑群上的平移*

2.2　圆周上的扩张自同态

设 $m \in \mathbb{Z}$，$|m| > 1$，定义 $E_m : S^1 \to S^1$，$E_m x = mx \pmod 1$。则 E_m 是 S^1 上的一个不可逆群自同态。

由定义知，任意点有 m 个原像。E_m 将相近的点的距离扩大 m 倍：若 $d(x,y)\le 1/2m$，则 $d(E_mx,E_my)=d(x,y)$。这是一个扩张映射的例子：度量空间上的一个映射称为扩张映射，如果其将相近的点的距离扩大至少 $\mu>1$ 倍。

下面我们来考虑 E_m 的基本性质。

首先 E_m 保持 S^1 上的 Lebesgue 测度 λ 不变：若 $A\subset S^1$ 可测，则 $\lambda(E_m^{-1}(A))=\lambda(A)$。

注记 2.4. 若区间 I 的长度充分小，则有 $\lambda(E_m(I))=m\lambda(I)$。

设 $m>1$ 为正整数，记 $\Sigma=\{0,\cdots,m-1\}^{\mathbb{N}}$，$\sigma:\Sigma\to\Sigma$ 是其上的转移：$\sigma((x_1,x_2,x_3,\cdots))=(x_2,x_3,x_4,\cdots)$. 对 $x\in[0,1]$，我们考虑其的 m 进制展开：$x=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{x_i}{m^i}$，$(x_i)_{i\in\mathbb{N}}\in\Sigma$，记为 $x=0.x_1x_2x_3\cdots$。

注记 2.5. m 进制展开不一定唯一。

我们定义 $\phi:\Sigma\to[0,1]$，$\phi((x_i)_{i\in\mathbb{N}})=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{x_i}{m^i}$. 若将 0 和 1 等同，$\phi$ 可视为 Σ 到 S^1 的映射。由定义知 ϕ 是满射，且在除去一个可数集 (以全 0 或全 $m-1$ 结尾的序列) 之外是单的。若 $x=0.x_1x_2x_3\cdots\in[0,1]$，则 $E_mx=0.x_2x_3x_4\cdots$. 于是 $\phi\circ\sigma=E_m\circ\phi$，即 ϕ 是 σ 到 E_m 的半共轭。若 $(x_i)\in\Sigma$ 是 σ 的 k-周期点，则对任意 i，有 $x_{k+i}=x_i$。于是可知 σ 有 m^k 个 k 周期点，从而 E_k 有 m^k-1 个 k-周期点。

记 $\mathcal{F}_m=\cup_{k=1}^{\infty}\{0,\cdots,m-1\}^k$，则 $A\subset[0,1]$ 是稠密的，当且仅当，对任意 $w\in\mathcal{F}_m$，存在 A 中的元素以其为小数点后的前缀。于是我们知 E^1 的周期点在 S^1 中稠密。$x=0.x_1x_2x_3\cdots$ 的轨道在 S^1 中稠密当且仅当 $\mathcal{F}$ 中任意有限序列均出现在序列 (x_i) 中。由 $\mathcal{F}_m$ 可数我们知这样的点的存在性 (将 $\mathcal{F}_m$ 中的所有元素连起来)。

考虑 $S^1=[0,1]/\sim$ 的一个区间剖分

$$P_k=[k/m,(k+1)/m),\ 0\le k\le m-1.$$

对 $x\in[0,1]$，若 $E_m^ix\in P_k$，则记 $\psi_i(x)=k$. 于是映射 $\psi:S^1\to\Sigma$ $x\mapsto(\psi_i(x))_{i=0}^{\infty}$ 是 φ 的一个右逆，即 $\phi\circ\psi=Id$。特别地，$x\in S^1$ 由序列 $(\psi_i(x))$ 唯一确定。

第 3 讲　转移和子转移

上面提到的 (Σ, σ) 是符号动力系统的一个重要的范例。

设 $m > 1$ 为整数，$\mathcal{A}_m$ 为字母表，$i \in \mathcal{A}_m$ 的一个符号。有限的符号序列称为是一个词。记 $\Sigma_m = \mathcal{A}_m^{\mathbb{Z}}$，$\Sigma_m^+ = \mathcal{A}_m^{\mathbb{N}}$。

我们称序列 $x = (x_i)$ 包含词 $w = w_1 w_2 \cdots w_k$，如果存在 j，使得 $w_i = x_{j+i}$，$i = 1, \cdots k$。

Σ_m 和 Σ_m^+ 在 $\mathcal{A}_m$ 上的离散拓扑的乘积拓扑下构成了一个紧拓扑空间，由柱形集构成了这个拓扑的一组基：

$$c_{j_1, \cdots, j_k}^{n_1, \cdots, n_k} = \{x = (x_l) : x_{n+i} = j_i, i = 1, \cdots, k\}$$

其中 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ 为 $\mathbb{Z}$ 或 $\mathbb{N}$ 中的指标，$j_i \in \mathcal{A}_m$。由于柱形集的原像是柱形集，故 σ 在 Σ_m^+ 上连续，在 Σ_m 上为同胚。度量

$$d(x, x') = 2^{-l}, \text{ 其中 } l = \min\{|i| : x_i \neq x_i'\}$$

生成了 Σ_m 和 Σ_m^+ 上的乘积拓扑。

在 Σ_m 中，开球 $B(x, 2^{-l})$ 是对称柱形集 $c_{x_{-l}, x_{-l+1}, \cdots, x_l}^{-l, -l+1, \cdots, l}$. 在 Σ_m^+ 中，$B(x, 2^{-l}) = c_{x_l, \cdots, x_l}^{1, \cdots, l}$。

定义 (左) 转移 σ 将 $x = (x_i)$ 映为 $\sigma(x) = (\sigma(x)_i)$，其中 $\sigma(x)_i = x_{i+1}$。(Σ_m, σ) 称为双边全转移，(Σ_m^+, σ) 称为单边全转移。

σ 在 Σ_m^+ 上是扩张的：若 $d(x, x') < 1/2$，则 $d(\sigma(x), \sigma(x')) = 2d(x, x')$。在乘积拓扑下，周期点稠密，且存在稠密的轨道。

全空间的一个转移不变的闭子集称为一个子转移。下面我们利用图的概念来给出子转移的一个表示。子转移可以由一个 n 阶 0-1 矩阵，称为邻接矩阵来刻画。A 对应一个 m 个顶点的有向图 Γ_A, A 中的元素 a_{ij} 表示从第 i 个顶点到第 j 个顶点有 a_{ij} 条边。反过来如果 Γ 是一个以 $v_1, \cdots, v_m$ 为顶点的有向图，按照上述方式 Γ 确定了一个邻解矩阵 B，满足 $\Gamma = \Gamma_B$。

给定一个 $m \times m$ 阶邻接矩阵 $A = (a_{ij})$，我们称由字母表 $\mathcal{A}_m$ 中的词或无穷序列 x 是容许的，如果对每个 i 有 $a_{x_i, x_{i+1}} > 0$，即对每个 i 都要一条从 x_i 到 x_{i+1} 的有向边。

第 4 讲　二次映射

对 $\mu > 0$ 记 $q_\mu(x) = \mu x(1-x)$。

第 5 讲　连分数

第 6 讲　线性映射

定义 6.1. 设 $A:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是一个线性映射。我们称 A 的特征值全体构成的集合为 A 的谱，记为 $\mathrm{sp}(A)$。我们称

第 7 讲　环面双曲自同构

将 $\mathbb{R}^2$ 上的与 v_λ 平行的直线投射到 $\mathbb{T}^2$ 上，可以得到一族平行线 W^u。对 $x\in\mathbb{T}^2$,经过 $x\in\mathbb{T}^2$ 的线 $W^u(x)$ 称为 x 的不稳定流形。W^u 构成 $\mathbb{T}^2$ 的一个剖分，称为 A 的不稳定叶状结构。这个叶状结构是不变的，即 $A(W^u(x))=W^u(Ax)$。进一步地，A 将 W^u 中的每条线段扩张 λ 倍。类似地，我们也可以定义稳定流形的概念，稳定叶状结构 W^s 是 $\mathbb{R}^2$ 中与 $V_{1/\lambda}$ 平行的直线在 $\mathbb{T}^2$ 中的投影。这个叶状结构也是在 A 下不变的，且稳定流形上的线段在 A 作用下缩小到原来的 $1/\lambda$ 倍。

命题 7.1. *二维双曲环面自同构的特征值是无理数。*

证明. 注意二维双曲环面自同构对应的矩阵的行列式为 1 或 -1。若行列式为 1，则特征方程为整系数方程 $\lambda^2+q\lambda+1=0$，其解为 $\lambda=\frac{-q\pm\sqrt{q^2-4}}{2}$。其为有理数当且仅当 q^2-4 是平方数。设 $q^2-4=p^2$，其中 p 为非负整数，则 $(q-p)(q+p)=4$。于是 $q-p=1$ 或 $q-p=2$，若 $q-p=1$ 则 $q+p=4$ 矛盾。于是 $q-p=q+p=2$ 从而 $q=2$ 且 $p=0$。但此时特征根为 1，矛盾，从而得证。行列式等于 -1 的时候类似可得。这个 □

注记 7.2. 由上面命题和命题 10.2 我们知双曲环面自同构的稳定流形和不稳定流形在环面中稠密。

第 8 讲　马蹄

第 9 讲　螺线管

第 10 讲　扭扩和横截

例 10.1. 固定 $\alpha \in \mathbb{R}$，定义线性流 $\phi_\alpha^t : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ 如下：

$$\phi_\alpha^t(x, y) = (x + \alpha t, y + t) \pmod 1$$

命题 10.2. 若 α 是无理数，则 ϕ_α 的任意轨道是 $\mathbb{T}^2$ 的稠密子集。

第 11 讲　拓扑动力系统的回复性和传递性

定义 11.1. 一个拓扑动力系统是指一个拓扑空间 X 以及其上的连续映射 $f: X \to X$ 以及其上的连续 (半) 流 f^t (即满足映射 $(t,x) \to f^t(x)$ 连续的 (半) 流)。

我们一般要求 X 是局部紧，可度量化，以及第二可数的。

定义 11.2. 若 (X,d) 和 (Y,d') 是度量空间，映射 $f: X \to Y$ 称为是一个等距，如果对任意 $x_1, x_2 \in X$ 有 $d'(f(x_1), f(x_2)) = d(x_1, x_2)$。

11.1　极限集和回复集

设 $f: X \to X$ 为一个拓扑动力系统。设 $x \in X$。点 $y \in X$ 是 x 的一个 ω-极限点，如果存在一族自然数 $n_k \to \infty$ (若 $k \to \infty$) 使得 $f^{n_k} \to y$。x 的 ω-极限集是 x 的所有 ω-极限点全体构成的集合 $\omega(x) = \omega_f(x)$。等价地，

$$\omega(x) = \cap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\cup_{i \geq n} f^i(x)}.$$

类似地，当 f 可逆时，我们可以定义 x 的 α 极限集 $\alpha(x) = \alpha_f(x) = \cap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\cup_{i \geq n} f^{-i}(x)}$. $\alpha(x)$ 中的点称为 x 的 α 极限点.

命题 11.3. *设 (X,f) 是一个拓扑动力系统。X 中任意点的 ω-极限集是闭 f-不变的。若 f 可逆，则任意点的 α-极限集也是闭 f-不变的。*

点 x 称为 (正向) 回复的，如果 $x \in \omega(x)$；回复点集 $\mathcal{R}(f)$ 是 f-不变的。显然，周期点是回复点。

点 x 称为非游荡点，如果对 x 的任意邻域，存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$。

命题 11.4. *非游荡点集 $NW(f)$ 是闭 f-不变的，且对任意 $x \in X$，有 $\omega(x)$ 和 $\alpha(x)$ 包含于其中。*

命题 11.5. *任意回复点是非游荡点，从而 $\overline{\mathcal{R}(f)} \subseteq NW(f)$。*

注记 11.6. 一般地，$\mathrm{NW}(f) \not\subseteq \overline{\mathcal{R}(f)}$。(考虑符号全转移)

我们回顾几个记号：我们记 $\mathcal{O}^+(x) = \cup_{n \in \mathbb{N}_0} f^n(x)$。若 f 可逆，我们记 $\mathcal{O}(x) = \cup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(x)$。

命题 11.7. *我们有：*

1. *设 f 是一个同胚，$y \in \overline{\mathcal{O}(x)}$ 且 $z \in \overline{\mathcal{O}(y)}$，则 $z \in \overline{\mathcal{O}(x)}$。*

2. 设 f 是一个连续映射，$y \in \overline{\mathcal{O}^+(x)}$ 且 $z \in \overline{\mathcal{O}^+(y)}$，则 $z \in \overline{\mathcal{O}^+(x)}$。

设 X 是紧的. 一个闭，非空，正向 f-不变子集 $Y \subset X$ 称为是 f 的一个极小集，如果其不包含任意的闭，非空，正向 f-不变子集。注意一个周期轨是一个极小集。若 X 是极小的，则我们称 f 是极小的。

命题 11.8. 紧不变集 Y 是极小的，当且仅当 Y 中任意点的轨道在 Y 中稠密。

定理 11.9. 设 $f: X \to X$ 是一个拓扑动力系统。若 X 是紧的，则 X 包含了 f 的一个极小集。

命题 11.10. 若 X 是紧拓扑空间，则极小集中的任意点是回复点。

由命题11.10，我们知若 X 是紧拓扑空间，则必存在回复点。

11.2 拓扑传递性

一个拓扑动力系统 $f: X \to X$ 是拓扑传递的，如果存在点 $x \in X$，其正向轨道在 X 中稠密。如果 X 没有孤立点，这个条件等价于存在一个点，其 ω-极限集在 X 中稠密。

命题 11.11. 设 $f: X \to X$ 为局部紧 *Hausdorff* 空间 X 上的一个连续映射。设对任意两个非空开集 U 和 V，存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$。则 f 是拓扑传递的。

证明. 由假设我们知对任意开集 $V \subseteq X$，集合 $\cup_{n\in\mathbb{N}} f^{-n}(V)$ 与任意非空开集交非空，故其在 X 中稠密。设 $\{V_i\}$ 为 X 的一组拓扑基。则 $Y = \cap_i \cup_{n\in\mathbb{N}} f^{-n}(V_i)$ 为开稠集的可数交，于是由 Baire 纲定理知其非空。任意点 $y \in Y$ 的正向轨道都会在某个时刻进入 V_i，从而在 X 中稠密。 □

推论 11.12. 如果 $f: X \to X$ 是拓扑传递的，则不存在 f-不变的非常值连续函数 $\varphi: X \to \mathbb{R}$。

证明. 设 $\varphi: X \to \mathbb{R}$ 是 f-不变的，即对任意 $x \in X$ 有 $\varphi(f(x)) = \varphi(x)$。由于 φ 不为常值，存在 $t \in \mathbb{R}$ 使得 $\{x \in X | \varphi(x) > t\}$ 和 $\{x \in X | \varphi(x) > t\}$ 是非空的。由 φ 的不变性，这两个集合是不变的。同时由 φ 的连续性，它们是开的。 □

命题 11.13. 设 $f: X \to X$ 是一个紧度量空间上的同胚，且设 X 无孤立点。如果存在一个稠密全轨道 $\mathcal{O}(x)$，则存在一个稠密正向轨道 $\mathcal{O}^+(y)$。

证明. 由于 $\overline{\mathcal{O}(x)} = X$，对任意非空开集 U，轨道 $\mathcal{O}(x)$ 至少可以和 U 相交一次，于是由 X 没有孤立点，故其相交无穷多次。从而存在序列 n_k，$|n_k| \to \infty$，使得对任意 $k \in \mathbb{N}$ 有 $f^{n_k}(x) \in B(x, 1/k)$，即当 $k \to \infty$ 时，$f^{n_k}(x) \to x$。于是对任意 $l \in \mathbb{Z}$ 我们有 $f^{n_k+l} \to f^l(x)$。我们有无限多个 n_k 大于零或无限多个 n_k 小于零，从而有 $\mathcal{O}(x) \subset \overline{\mathcal{O}^+(x)}$ 或 $\mathcal{O}(x) \subset \overline{\mathcal{O}^-(x)}$。若前者成立，则 $\overline{\mathcal{O}^+(x)} = X$，从而得

证。如果 $\overline{\mathcal{O}^-(x)} = X$，取两个非空开集 U，V，于是由条件存在整数 $i < j < 0$ 使得 $f^i(x) \in U$ 且 $f^j(x) \in V$，从而 $f^{j-i}(U) \cap V \neq \emptyset$。从而，由命题11.11我们有 f 是拓扑传递的。 $\square$

第 12 讲　拓扑动力系统的混合性和可扩性

12.1　拓扑混合性

拓扑动力系统 $f: X \to X$ 称为是拓扑混合的，如果对任意两个非空开集 $U, V \subset X$，存在 $N > 0$ 使得当 $n \geq N$ 时有 $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ 成立。

由命题11.11，拓扑混合性可以推出拓扑传递性，但反之不一定。

例 12.1. 圆周无理旋转是极小的，从而是拓扑传递的；但是它不是拓扑混合的。

下面我们来验证之前提到过的一些例子的拓扑混合性。

命题 12.2. 任意双曲环面自同构 $A : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ 是拓扑混合的。

证明. □

命题 12.3. 双边全转移 (Σ_m, σ) 和单边全转移 (Σ_m^+, σ) 是拓扑混合的。

推论 12.4. 马蹄 (H, f) 是拓扑混合的。

12.2　可扩性

同胚 $f : X \to X$ 称为可扩的，如果存在 $\delta > 0$ 使得对任意两个不同的点 $x, y \in X$，存在 $n \in \mathbb{Z}$ 使得 $d(f^n(x), f^n(y)) \geq \delta$。若 f 是一个不可逆连续映射，则其为正向可扩的，如果任意两个不同的点 $x, y \in X$，存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $d(f^n(x), f^n(y) \geq \delta$。任意满足上面性质的数 $\delta > 0$ 称为 f 的一个可扩常数。

命题 12.5. 设 f 为一个无限紧度量空间 X 的一个同胚。则对任意 $\epsilon > 0$ 存在不同的点 $x_0, y_0 \in X$ 使得对任意 $n \in \mathbb{N}_0$ 有 $d(f^n(x_0), f^n(y_0)) \leq \epsilon$。

推论 12.6. 设 f 为一个无限紧度量空间 X 上的一个可扩同胚。则存在 $x_0, y_0 \in X$ 使得当 $n \to \infty$ 时，有 $d(f^n(x_0), f^n(y_0)) \to 0$。

第 13 讲　拓扑熵

设 (X,d) 是紧度量空间，$f:X\to X$ 连续. 对 $n\in\mathbb{N}$，定义 $d_n(x,y)=\max_{0\le k\le n-1} d(f^k(x),f^k(y))$. 不难看出 $d_1=d$.

习题 13.1. 证明 d_n 是 X 上的一个度量. 且 $d_n\ge d_{n-1}$

习题 13.2. 对任意 $i,\ j\in\mathbb{N}$，d_i 和 d_j 是等价度量，即它们诱导了 X 上相同的拓扑.

固定 $\epsilon>0$。集合 $A\subset X$ 称为是 (n,ϵ)-张成的，如果对任意 $x\in X$，存在 $y\in A$ 使得 $d_n(x,y)<\epsilon$。由紧性我们知存在有限的 (n,ϵ)-张成集。设 $\mathrm{span}(n,\epsilon,f)$ 是 X 的 (n,ϵ)-张成集的最小可能元素个数。集合 $A\subset X$ 称为是 (n,ϵ)-分离的，如果对任意两个不同的点 $x,y\in X$，则 $d_n(x,y)\ge\epsilon$. 任意的 (n,ϵ)-分离集是有限的。设 $\mathrm{sep}(n,\epsilon,f)$ 是 X 的 (n,ϵ)-分离集的最大可能元素个数。设 $\mathrm{cov}(n,\epsilon,f)$ 是覆盖 X 所需的 d_n-直径小于 ϵ 的元素的最小个数。由紧性，我们知 $\mathrm{cov}(n,\epsilon,f)$ 是有限的。

注记 13.1. $\mathrm{span}(n,\epsilon,f)$，$\mathrm{sep}(n,\epsilon,f)$，$\mathrm{cov}(n,\epsilon,f)$ 是在不同角度下对在 ϵ-尺度下对长为 n 的轨道个数的刻画。

引理 13.2. $\mathrm{cov}(n,2\epsilon,f)\le\mathrm{span}(n,\epsilon,f)\le\mathrm{sep}(n,\epsilon,f)\le\mathrm{cov}(n,\epsilon,f)$。

设
$$h_\epsilon(f)=\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(\mathrm{cov}(n,\epsilon,f)). \tag{1}$$
由于 $\mathrm{cov}(n,\epsilon,f)$ 当 ϵ 递减趋于零时是单调递增的，我们有 $h_\epsilon(f)$ 也是当 ϵ 递减趋于零时是单调递增的，从而极限

$$h_{top(f)}=\lim_{\epsilon\to0^+}h_\epsilon(f)$$

存在，称为 f 的拓扑熵。由引理 13.2 我们知 $h(f)$ 还可以用 $\mathrm{span}(n,\epsilon,f)$ 和 $\mathrm{sep}(n,\epsilon,f)$ 来定义，即

$$h(f)=\lim_{\epsilon\to0^+}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(\mathrm{span}(n,\epsilon,f))=\lim_{\epsilon\to0^+}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(\mathrm{sep}(n,\epsilon,f)).$$

引理 13.3. *极限 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(cov(n,\epsilon,f))=h_\epsilon(f)$ 存在且有限。*

注记 13.4.

$$\begin{aligned}h(f)&=\lim_{\epsilon\to0^+}\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(\mathrm{span}(n,\epsilon,f))\\&=\lim_{\epsilon\to0^+}\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(\mathrm{sep}(n,\epsilon,f))\end{aligned}$$

注记 13.5. 拓扑熵是一个有限非负数或 $+\infty$。

命题 13.6. 拓扑熵不依赖于生成相同拓扑的度量的选取。

推论 13.7. 拓扑熵是一个拓扑共轭不变量。

命题 13.8. 设 $f : X \to X$ 是紧度量空间 X 上的一个连续映射。

- 对任意 $m \in \mathbb{N}$ 有 $h(f^m) = m \cdot h(f)$。
- 若 f 可逆，则 $h(f^{-1}) = h(f)$。
- 若 A_i，$i = 1, \cdots, k$ 是 X 的闭的 *(不一定不交)* 正向 f-不变子集，其并为 X，则
$$h(f) = \max_{1 \leq i \leq k} h(f|_{A_i}).$$
特别的，若 A 是 X 的一个闭正向不变子集，则 $h(f|A) \leq h(f)$。

命题 13.9. 设 (X, d^X) 以及 (Y, d^Y) 是紧度量空间，且 $f : X \to X$ 和 $g : Y \to Y$ 是连续映射。则：

- $h(f \times g) = h(f) + h(g)$；且
- 若 g 是 f 的一个因子，则 $h(f) \geq h(g)$。

第 14 讲　拓扑熵的计算

命题 14.1. 设 (X,d) 为一个紧度量空间，且 $f : X \to X$ 为一个以 δ 为可扩常数的可扩同胚。则对任意 $\epsilon < \delta$ 有 $h(f) = h_\epsilon(f)$。

引理 14.2. 设 X 为一个紧度量空间且 $f : X \to X$ 为一个以 δ_0 为可扩常数的可扩同胚。则对 $0 < \epsilon < \delta_0/2$ 以及 $\delta > 0$ 存在 $C_{\delta,\epsilon}$ 使得对任意 $n \in \mathbb{N}$ 我们有

$$\mathrm{sep}(\delta, n, f) \leq C_{\delta,\epsilon}\mathrm{sep}(n, \epsilon, f).$$

证明. 对 $0 < \epsilon < \delta_0/2$ 由可扩性我们知存在 $N \in \mathbb{N}$ 满足

$$d_{2N+1}(f^{-N}(x), f^{-N}(y)) \leq 2\epsilon \Rightarrow d(x,y) < \delta.$$

再由 X 的紧性我们知存在 $\alpha > 0$ 使得

$$d(x,y) \leq \alpha \Rightarrow d_{2N+1}(f^{-N}(x), f^{-N}(y)) \leq \delta.$$

若 E 是元素个数最多的 (n,δ)-分离集，且 F 是元素个数最多的 (n,ϵ)-分离集，则对 $x \in E$ 存在 $z(x) \in F$ 使得 $d_n(x, z(x)) < \epsilon$。则 $\sharp(E) \leq \sum_{z\in F} \sharp(E_z)$，其中 $E_z := \{x \in E | z(x) = z\}$。

若 $x, y \in E_z$ 则由 E_z 的定义知 $d_n(x,y) \leq 2\epsilon$，从而由 N 的选取我们知对 $i \in [N, n-N]$ 有 $d(f^i(x), f^i(y)) \leq \delta$。于是由 α 的选取且由于 $\{x,y\}$ 是 (n,δ)-分离的，$d(x,y) > \alpha$ 或 $d(f^n(x), f^n(y)) > \alpha$。

从而

$$\begin{aligned}\sharp(E_z) &= \sharp\{(x, f^n(x)) | x \in E_z\} \\ &\leq \max\{\sharp A | A \subset X \times X \text{ 且对任意 } a, b \in A, d(a,b) > \alpha\} =: M,\end{aligned}$$

这里 M 仅依赖于 α，于是其仅依赖于 δ 和 ϵ。 □

推论 14.3. 显然若 $\delta > \epsilon$ 我们可以取 $C_{\delta,\epsilon} = 1$。

命题 14.4. 设 $\tilde{A}$ 是一个 2×2 整系数矩阵，行列式为 1 且特征值为 λ, λ^{-1}，满足 $|\lambda| > 1$；且设 $A : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ 为与其相关联的双曲环面自同构。则 $h(A) = \log|\lambda|$。

第 15 讲　等度连续，distal 和 proximal 性质

第 16 讲　符号动力系统 I

第 17 讲　有限型子转移

第 18 讲 Sofic 转移

18.1 Sofic 转移的表示

定义 18.1. 一个带标签图 $\mathcal{G}$ 形如 $(G,\mathcal{L})$，其中 G 是一个以 $\mathcal{E}$ 为边集的图，且标签 $\mathcal{L}:\mathcal{E}\to\mathcal{A}$ 将 G 中的每条边 e 映为有限字母表 $\mathcal{A}$ 中的一个元素 $\mathcal{L}(e)$. G 称为 $\mathcal{G}$ 的关联图。带标签图 $\mathcal{G}$ 是不可约的当且仅当其对应的图为不可约的，其为本性的当且仅当对应的图为本性的。

如果 $\mathcal{G}=(G,\mathcal{L})$ 是一个带标签图，对于 G 上的一条道路 $\pi=e_1e_2\cdots e_n$，定义其标签为

$$\mathcal{L}(\pi)=\mathcal{L}(e_1)\mathcal{L}(e_2)\cdots\mathcal{L}(e_n),$$

其为 $\mathcal{A}$ 上的一个 n-区块，所以我们有时也称其为一个标签区块。对于 G 中的空路径 ϵ_I 我们定义 $(\epsilon_I)=\epsilon$ 为 $\mathcal{A}$ 上的空词。若 $\xi=\cdots e_{-1}e_0e_1\cdots$ 是 G 上的双无限路径，使得 ξ 是边转移 X_G 中的一个点，定义 ξ 的标签为

$$\mathcal{L}_\infty(\xi)=\cdots\mathcal{L}(e_1)\mathcal{L}(e_2)\cdots\mathcal{L}(e_n)\cdots\in\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}.$$

G 上的双无限路径的标签集记为

$$\begin{aligned} X_{\mathcal{G}} &= \{x\in\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}:x=\mathcal{L}_\infty(\xi)\text{ 对某个 }\xi\in X_G\}\\ &= \{\mathcal{L}_\infty(\xi):\xi\in X_G\}=\mathcal{L}_\infty(X_G).\end{aligned}$$

定义 18.2. 全转移的子集 X，如果对某个标签图 $\mathcal{G}$ 有 $X=X_{\mathcal{G}}$，则称其为一个 sofic 转移。$\mathcal{G}$ 称为 X 的一个表示。记 $\sigma_{\mathcal{G}}$ 为 $X_{\mathcal{G}}$ 的转移映射。

定理 18.3. *Sofic* 转移是子转移。

定理 18.4. 有限型子转移是 *sofic* 的。

命题 18.5. 一个 *sofic* 转移是一个有限型子转移当且仅当其有一个表示 $(G,\mathcal{L})$ 使得 $\mathcal{L}_\infty$ 是一个共轭。

18.2 Sofic 转移的刻画

定理 18.6. 一个子转移是 *sofic* 的当且仅当其为一个有限型子转移的因子。

推论 18.7. *Sofic* 转移的因子还是 *sofic* 的。

推论 18.8. 和 *sofic* 转移共轭的子转移也是 *sofic* 的。

定义 18.9. 设 X 是一个子转移，$w \in \mathcal{B}(X)$。w 在 X 中的后继集 $F_X(w)$ 定义为：

$$F_X(w) = \{v \in \mathcal{B}_X : wv \in \mathcal{B}(X)\}.$$

记后继集全体的构成的集合为

$$\mathcal{C}_X = \{F_X(w) : w \in \mathcal{B}(X)\}.$$

设 X 是字母表 $\mathcal{A}$ 上的一个子转移，且 $\mathcal{C}_X$ 是有限集。我们来构造一个标签图 $\mathcal{G} = (G, \mathcal{L})$，称为 X 的后继集图。G 的顶点集为 $\mathcal{C}_X$ 的元素 C。设 $C = F_X(w) \in \mathcal{V}$ 以及 $a \in \mathcal{A}$。若 $wa \in \mathcal{B}(X)$，则 $C' := F_X(wa) \in \mathcal{V}$，则作一条从 C 到 C' 的边，标记为 a。如果 $wa \notin \mathcal{B}(X)$，则不作任何操作。对所有 $C \in \mathcal{V}$ 和 $a \in \mathcal{A}$ 我们得到我们想要的标签图 $\mathcal{G}$。

命题 18.10. *如果 X 是一个子转移，其后继集全体的构成的集合是一个有限集，且设 $\mathcal{G}$ 为 X 的后继集图，则 $\mathcal{G}$ 是 X 的一个表示。特别地，X 是 sofic 的。*

定理 18.11. *子转移是 sofic 的当且仅当其后继集的个数是有限的。*

第 19 讲　动力学 zeta 函数

第 20 讲　保测系统

第 21 讲　遍历定理

第 22 讲　唯一遍历性

第 23 讲　保测系统的谱分析

第 24 讲　多重回复与多重遍历