中山大学研究生期末考试

考试科目：《微分动力系统》

学年学期：2021-2022 学年第 2 学期　　姓　　名：________________

学　院/系：数学学院 (珠海)　　学　　号：________________

考试方式：—-　　年级专业：________________

考试时长：—-　　班　　别：________________

−−−−−−−−−以下为试题区域，共八道大题。选择五道作答，其中前四题至少选择两题，后四题至少选择一题作答，每题 20 分，总分 100 分 (交卷截止时间：6 月 28 日 12 点) −−−−−−−−−

注：对于每题，即使前一问没有做出来，其结论也可用于下一问的证明。

1. 设 $T:[0,1]\to[0,1]$ 是 $[0,1]$ 上保持 Lebegue 测度不变的可测映射，证明对几乎处处的 $x\in[0,1]$，有

$$\liminf_{n\to\infty} n\cdot|T^n(x)-x|\le 1.$$

2. 求证若 α 是无理数，圆周旋转 R_α 是极小的。

3. 证明如果 f 是 S^1 的逆定向同胚，证明 f 恰有两个不动点，且 $\rho(f^2)=0$。

4. 设 (X,σ) 为单边 L 符号全转移 (Ω,σ) 的子系统且 $h_{top}(X,\sigma)=\log L$，证明 $X=\Omega$。

5. 证明帐篷映射 $g:[0.1]\to[0,1]$，

$$g(x)=\begin{cases}2x, & 0\le x\le \frac{1}{2}\\ 2-2x, & \frac{1}{2}\le x\le 1,\end{cases}$$

保持 Lebesgue 测度不变且关于 Lebesgue 测度是遍历的。

6. 设 $\lambda>2+\sqrt{5}$ 且 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto\lambda x(1-x)$。

(1) 求 $f^{-1}[0,1]$。

(2) 记 $\Lambda:=\cap_{n\in\mathbb{N}_0}f^{-n}([0,1])$，证明 $f|_\Lambda$ 共轭于 2 个符号的单边全转移。

(3) 若 $\lambda\in(4,2+\sqrt{5}]$，结论又如何？

7. (区间映射的结构稳定性)

(1) $[a,b]$ 上的在 (a,b) 中没有不动点的两个保向同胚是拓扑共轭的。

(2) 设 f 是 $[a,b]$ 上的在 (a,b) 中没有不动点的保向同胚。证明对任意 $r\geq 1$，f 是 C^r 结构稳定的当且仅当 $f'(a)\neq 1$ 且 $f'(b)\neq 1$。

8. (拓扑传递性) 我们称一个拓扑动力系统 $f:X\to X$ 是拓扑传递的，如果存在 $x\in X$，x 的轨道在 X 中稠密。

(1) 设 $f:X\to X$ 是一个局部紧可分度量空间 X 上的连续自映射。证明 f 是拓扑传递的当且仅当对任意两个非空开集 $U,V\subset X$，存在一个整数 $N=N(U,V)$ 使得 $f^N(U)\cap V$ 是非空的。

(2) 一个局部紧可分度量空间上的连续开映射 f 是拓扑传递的当且仅当不存在两个不交的 f-不变的非空开集。

(3) 若 $f:X\to X$ 是拓扑传递的，则不存在 f-不变的非常值连续函数 $\varphi:X\to\mathbb{R}$。

(4) 证明映射 $A_\alpha:\mathbb{T}^2\to\mathbb{T}^2$, $A_\alpha(x,y)=(x+\alpha,y+x) \pmod 1$ 为拓扑传递的当且仅当 α 是无理数。

交卷方式：答题做成一个 pdf 文件，在截止时间之前发到我邮箱。