

## 第 2 次作业

截止日期：9 月 13 日

习题 0.1. 课本习题 2.16.

习题 0.2. 课本习题 2.18.

习题 0.3. 课本习题 2.30.

习题 0.4. 课本习题 4.27.

习题 0.5. 记  $\pi(n)$  为不超过  $n$  的素数个数. 注意到对于任一正整数  $n$ , 其有唯一的形如下的素因子分解

$$n = \prod_{i=1}^{\pi(n)} p_i^{X_i}.$$

其中  $p_1, p_2, p_3, \dots$  为素数. 即  $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \dots$ .  $X_i = X_i(n)$  为一个非负整数, 其表示  $n$  的素因子分解中  $p_i$  的重数. 设  $N$  为在  $\{1, 2, \dots, n\}$  上均匀分布的一个随机变量.

(1) 证明  $X_i(N)$  为一个整数值随机变量, 满足

$$0 \leq X_i(N) \leq \log n.$$

(2) 证明  $\log n = H(N) \leq \pi(n) \log(\log n + 1)$ . 从而  $\pi(n) \geq \frac{\log n}{\log(\log n + 1)}$ . 特别地当  $n \rightarrow \infty$  时有  $\pi(n) \rightarrow \infty$ .

习题 0.6. 证明在第 3 讲中提到的结论: 当  $\alpha \rightarrow 1$  时, 我们有

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} H_\alpha(X) = H(X)$$

以及

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} D_\alpha(X \parallel \hat{X}) = D(X \parallel \hat{X}).$$