

## 第 6 次作业

截止日期：4 月 3 日

习题 1. 课本习题 2.30.

习题 2. 课本习题 2.49.

习题 3. 课本习题 2.50.

习题 4. 课本习题 3.2.

习题 5. 课本习题 4.4.

习题 6. 课本习题 4.6.

习题 7. 设我们有一个随机变量  $X \sim \text{HGoem}(w, b, n)$ , 求其期望和方差.

习题 8. 设  $G = (V, E)$  为一个随机图, 顶点集  $V$  元素个数为  $m = |V|$ , 其边集为  $E$ . 记  $d_v$  是顶点的度  $d_v$ , 即以  $v$  为端点的边的条数. 设  $Y$  是在所有顶点中等可能地选取的一个顶点,  $Z$  是在与  $Y$  有边相连的顶点中等可能选取的一个顶点. 证明  $Ed_Z \geq Ed_Y$ .

习题 9 (附加题). 主持人给你两个信封, 告诉你两个信封里都有一定量的现金 (这里我们作一点不是那么符合实际的假设, 我们允许比如 1/3 元的现金), 其中一个信封里的钱是另一个信封里的  $m$  倍 ( $m > 1$ ). 当你打开其中一个信封, 看到里面的钱数以后, 你可以收下这个信封里面的钱作为奖金, 也可以要求更换, 将另一个信封里的钱作为奖金.

下面有一个推理, 认为更换信封可以得到更高的收益. 其理由如下: 令  $A$  是你打开的信封,  $B$  是另一个信封. 令  $x$  和  $y$  分别是信封  $A$  和  $B$  中的钱数. 论证如下: 当已知  $x$  的时候,  $y$  的值有两种可能:  $y = x/m$ ,  $y = mx$ . 因为  $A$  和  $B$  两个信封钱数一大一小, 所以我们随机取一个取到钱数多的和钱数少的概率均为  $1/2$ . 因此,  $y = x/m$  和  $y = mx$  的概率均为  $1/2$ . 因此, 给定  $x$  之后,  $y$  的期望值为

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{m} + \frac{1}{2} \cdot mx = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{m} + m \right) x > x.$$

因此, 你应该总是换为信封  $B$ . 当你换为信封  $B$  时, 同样的理由你又应该换回信封  $A$ , 于是我们陷入了矛盾之中.

请问, 如何解释这一现象, 上面的推理是否有问题?