

第 1 次大作业

截止日期：3 月 22 日

习题 1. 从一副扑克牌 (除去大小王) 中, 任意抽出两张, 问都是黑桃的概率是多少?

习题 2. 已知事件 A 与事件 B 相互独立且互不相容, 试求 $\min\{P(A), P(B)\}$.

习题 3. 考虑一元二次方程 $x^2 + Bx + C = 0$, 其中 B, C 分别是将一枚骰子连续之两次先后的得到的点数, 求该方程有实根的概率 p 和有重根的概率 q .

习题 4. 设 A 和 B 是两个事件, 证明

$$P(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B).$$

习题 5. 设 \mathcal{F} 是 Ω 上的一个 σ -域, $B \in \mathcal{F}$. 证明 $\mathcal{G} = \{A \cap B : A \in \mathcal{F}\}$ 是 B 上的一个 σ -域.

习题 6. 投掷一枚均匀的硬币, 我们记录第一次出现正面时的总投掷次数 n . 求 n 为偶数的概率.

习题 7. 从数 $1, 2, 3, 4$ 中任取一个数, 记为 X , 再从 $1, \dots, X$ 中任取一个数, 记为 Y , 求 $P(Y = 2)$.

习题 8. 40 位同学乘坐一个 40 座的大巴前往广州, 每位同学的票上都有对应的座位号.

- 如果第一位同学坐错了位置, 后面上来的同学如果自己位置没有被坐的话, 就坐在车票对应的座位上, 否则随机挑选一个座位坐下, 问最后一位同学坐到自己票上对应座位的概率.
- 如果第一位同学时随机挑选一个位置坐下, 结果又是如何?

习题 9. 将长为 L 的棒随机地折成三段, 求三段构成一个三角形的概率.

习题 10. 设 $\Omega = \{1, 2, \dots, p\}$, 其中 p 为一个素数. 设 $A, B \subset \Omega$. 我们现在随机 (等可能) 地从 Ω 中选一个数. 这时我们可以把 A 和 B 看作两个事件, 分别表示随机抽取的数属于集合 A 和集合 B . 证明如果事件 A 和 B 独立, 那么 A, B 要么为空集, 要么为 Ω .

习题 11. 将一个球面的 10% 面积的区域涂成蓝色, 其它部分涂成红色. 试证明, 无论怎样上色, 总是能找到一个内接正方体, 使得其顶点的颜色全是红色.

习题 12. 考虑下面的电路图, 假设每个开关处于断开和闭合的概率分别为 p 和 q , 且各个开关的状态之间是相互独立的. 问如果在入口处发送一个信号, 在出口处接收到信号的概率是多少? 如果在出口处接收到信号, 那么开关 E 处于断开状态的概率是多少?

