第 2 次大作业

截止日期：4 月 26 日

习题 1. 设随机变量 X 服从泊松分布，$P(X=1)=P(X=2)$，求 $P(X=4)$.

习题 2. 设 X 是一个服从参数 p 的几何分布的随机变量，求 $E[1/X]$.

习题 3. 设随机变量服从参数为 $(2,p)$ 的二项分布，随机变量 Y 服从参数为 $(3,p)$ 的二项分布，若 $P(X\geq 1)=\frac{5}{9}$，求 $P(Y\geq 1)$.

习题 4. 设随机变量 X 具有概率质量函数

$$f(x)=\begin{cases}\{x(x+1)\}^{-1} & \text{如果 } x=1,2,\ldots,\\ 0 & \text{其它.}\end{cases}$$

问：当 $\alpha\in\mathbb{R}$ 取什么值时有 $E(X^\alpha)<\infty$?

习题 5. 我们抛一枚硬币，设正面朝上的概率为 p，设 H_n 和 T_n 是我们独立重复抛 n 次后正面朝上与反面朝上的次数. 证明：当 $n\to\infty$ 时，

$$P(2p-1-\epsilon\leq\frac{1}{n}(H_n-T_n)\leq 2p-1+\epsilon)\to 1.$$

习题 6. 设 X,Y 是两个独立的随机变量，X 在 $\{0,1,\cdots,m\}$ 上等可能地取值，Y 在 $\{0,1\cdots,n\}$ 上等可能地取值，求 $Z=X+Y$ 的概率分布.

习题 7. 设 X 是一个概率密度函数为 f 的非负随机变量. 设对 $r\geq 1$ 有 $E[X^r]$ 存在，证明我们有

$$E[X^r]=\int_0^\infty rx^{r-1}P(X>x)dx.$$

习题 8. 设我们有一个带吸收壁的随机游动，从点 k 出发，吸收壁位于点 0 和 a. 设第 i 步的移动方向 X_i (-1 表示向左，$+1$ 表示向右，0 表示不动) 满足

$$P(X_i=1)=P(X_i=-1)=p,\ P(X_i=0)=1-2p.$$

记 D_k 为这个随机游动从开始到被吸收时所经历的步数.

(i) 若 $p=1/2$，证明 $\mathrm{Var}(D_k)=\frac{1}{3}k(a-k)\{(a-k)^2+k^2-2\}$.

(ii) 试利用上一问结果，对 $p<1/2$ 计算 $\mathrm{Var}(D_k)$.

习题 9. 设 f, g 是两个概率密度函数，问 fg 是否是一个概率密度函数？

习题 10. 设 X 是一个取值非负整数的随机变量. 证明

$$E[X^2] = E[X] + 2\sum_{r=0}^{\infty} rP(X > r) = \sum_{r=0}^{\infty}(2r+1)P(X > r).$$

习题 11. 在 $1, 2, \cdots, n+m$ 中随机取 n 个数，设 X 是其中第 i 小的数，求 X 的概率分布.

习题 12. 有 n 个不稳定的分子 (molecule) $m_1, m_2, \cdots, m_n$ 排成一列，在 $n-1$ 组相邻的孤立分子构成的分子对中取一组让它们聚合为二聚体. 依次下去每次都在剩下的相邻的孤立分子构成的分子对中取一组让它们聚合为二聚体，直达无法再继续，即没有相邻的孤立分子. 我们记此时的的孤立分子数为 U_n. 求 m_1 没有被聚合的概率，并证明 $\lim_{n\to\infty} n^{-1}EU_n = e^{-2}$.