

第 2 次作业

截止日期：10 月 24 日

习题 1. 课本习题 2.10.

习题 2. 课本习题 2.18.

习题 3. 课本习题 2.30.

习题 4. 课本习题 4.16.

习题 5. 课本习题 4.20.

习题 6. 记 $\pi(n)$ 为不超过 n 的素数个数. 注意到对于任一正整数 n , 其有唯一的形如下的素因子分解

$$n = \prod_{i=1}^{\pi(n)} p_i^{X_i}.$$

其中 p_1, p_2, p_3, \dots 为素数. 即 $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \dots$. $X_i = X_i(n)$ 为一个非负整数, 其表示 n 的素因子分解中 p_i 的重数. 设 N 为在 $\{1, 2, \dots, n\}$ 上均匀分布的一个随机变量.

(1) 证明 $X_i(N)$ 为一个整数值随机变量, 满足

$$0 \leq X_i(N) \leq \log n.$$

(2) 证明 $\log n = H(N) \leq \pi(n) \log(\log n + 1)$. 从而 $\pi(n) \geq \frac{\log n}{\log(\log n + 1)}$. 特别地当 $n \rightarrow \infty$ 时有 $\pi(n) \rightarrow \infty$.