

中山大学本科生期末考试

考试科目：《随机过程》（A 卷）

学年学期：2023 学年第 2 学期

姓 名：_____

学 院/系：数学学院 (珠海)

学 号：_____

考试方式：闭卷

年级专业：_____

考试时长：120 分钟

班 别：_____

警示

《中山大学授予学士学位工作细则》第八条：“考试作弊者，不授予学士学位。”

----- 以下为试题区域，共十道大题，总分 100 分，考生请在答题纸上作答 -----

1. (10 分) 如果 $Z_0, Z_1, \dots$ 是独立同分布的随机变量，定义 $X_n = Z_0 + Z_1 + \dots + Z_n$ ，证明 $\{X_n, n = 0, 1, \dots\}$ 是平稳独立增量过程。

2. (10 分) 对于泊松过程 $\{N(t)\}$ ，计算

$$E[N(t)N(t+s)], E[N(t+s)|N(t)],$$

其中 $s > 0$ 。

3. (10 分) 设 $\{N(t)\}$ 是强度函数为 $\lambda(t)$ 的非齐次泊松过程， $X_1, X_2, \dots$ 是事件之间的间隔时间，问：

(1) 诸 X_i 是否独立？

(2) 诸 X_i 是否同分布？

4. (10 分) 探险家不幸落入漆黑的溶洞，有两条路供随机选择：沿第一条路探索 2 小时可以走出溶洞，沿第二条路摸索 1 小时返回原地。回到原地后只能再次进行随机选择。用 T 表示他走出溶洞所用的时间，试用更新间隔和停时描述 T ，并计算他走出溶洞平均需要的时间。

5. (10 分) 证明若到达间隔分布 F 是 $(0, 1)$ 均匀分布，那么我们有更新函数

$$m(t) = e^t - 1, 0 \leq t \leq 1.$$

6. (10 分) 设今日有雨明日也有雨的概率为 0.7，今日无雨明日有雨的概率为 0.5。求星期一有雨，星期三也有雨的概率。

7. (10 分) 对于分支过程计算群体灭绝概率 ρ_0 。

(1) $p_0 = 0.2, p_2 = 0.8;$

(2) $p_0 = 0.2, p_1 = 0.3, p_2 = 0.5.$

8. (10 分) 证明两端为反射壁的简单随机游动是可逆马氏链, 并计算对称化序列和平稳可逆分布.

9. (10 分) 考虑有两种状态的连续时间 Markov 链, 状态为 0 和 1, 链在离开 0 到达 1 之前在状态 0 停留的时间服从参数为 λ 的指数分布, 相应地在 1 停留的时间是参数为 μ 的指数随机变量. 对此建立 Kolmogorov 方程, 并求解.

10. (10 分) 假设乘客按速率为 λ 的泊松过程 $\{N(t)\}$ 到达一个火车站. 如果火车在时刻 t 离开, 计算在 $(0, t)$ 中到达的旅客等待时间的总和的期望.