第 1 次作业

截止日期：3 月 3 日

习题 1. 设随机过程 $X(t) = X + Yt + Zt^2$，其中 X，Y 和 Z 是相互独立的随机变量，且具有均值 0 和方差 1，求随机过程 $X(t)$ 的协方差函数.

解. 我们有 $EX(t) = E[X + Yt + Zt^2] = E[X] + tE[Y] + t^2E[Z] = 0$. 于是随机过程 $X(t)$ 的协方差函数为

$$\begin{aligned}\gamma(t_1, t_2) &= E[X(t_1)X(t_2)] = [E(X + Yt_1 + Zt_1^2)(X + Yt_2 + Zt_2^2)] \\ &= E[X^2] + t_1t_2E[Y^2] + t_1^2t_2^2E[Z^2] = 1 + t_1t_2 + t_1^2t_2^2. \square\end{aligned}$$

习题 2. 如果 $Z_0, Z_1, \cdots$ 是独立同分布的随机变量，定义 $X_n = Z_0 + Z_1 + \cdots + Z_n$，证明 $\{X_n, n = 0, 1, \cdots\}$ 是平稳独立增量过程.

证明. (1) 先证对任意给定的 k 个时刻 $0 \le n_1 < n_2 < \cdots < n_k$，随机变量 $X_{n_2} - X_{n_1}, X_{n_3} - X_{n_2}, \cdots, X_{n_k} - X_{n_{k-1}}$ 相互独立. 事实上，由于 $Z_0, Z_1, \cdots$ 是相互独立的随机变量，所以

$$X_{n_{i+1}} - X_{n_i} = \sum_{l=n_i+1}^{n_{i+1}} Z_i,\ i = 1, 2, \cdots$$

也相互独立.

(2) 再证 $\{X_n, n = 0, 1, \cdots\}$ 有平稳增量，即证明对任意给定的两个时刻 $0 \le n_1 < n_2$ 以及整数 $l > 0$，随机变量 $X_{n_1+l} - X_{n_1}$ 与 $X_{n_2+l} - X_{n_2}$ 有相同分布. 由 $Z_0, Z_1, \cdots$ 同分布知它们有相同的特征函数，记为 $\phi_{Z_1}(t)$. 再由 $Z_0, Z_1, \cdots$ 的独立性，我们有

$$X_{n_1+l} - X_{n_1} = \sum_{l=n_1+1}^{n_1+l} Z_l \text{ 与 } X_{n_2+l} - X_{n_2} = \sum_{l=n_2+1}^{n_2+l} Z_l$$

有相同的特征函数 $[\phi_Z(u)]^l$，利用随机变量特征函数唯一确定其分布的性质，我们知 $X_{n_1+l} - X_{n_1}$ 与 $X_{n_2+l} - X_{n_2}$ 有相同分布.

综上，$\{X_n, n = 0, 1, \cdots\}$ 是平稳独立增量过程. $\square$

习题 3. 某宠物商店每个月初订购一次猫粮 (单位：千克)，以满足该月的销售需求. 假设每月的需求服从参数为 λ 的指数分布. 如果商店猫粮的进价为 c 元每千克，售价为 $s(s > c)$ 元每千克. 假定月底剩下的存货因为过期毫无价值，而且商店不会因为进货量不足而受到额外损失. 那么该商店因订购多少猫粮使得期望利润最大？如果存货能以每千克 $r(r < \min(s, c))$ 元的价格退回，那么最佳订购量又是多少？

解. 令 X 为需求量. 假设猫粮的订购量为 t，那么利润 P 为

$$P = s\min(X, t) - ct.$$

注意到 $\min(X, t) = X - (X - t)^+$，以及由指数分布的无记忆性，我们有

$$\begin{aligned} E[(X-t)^+] &= E[(X-t)^+|X > t]P(X > t) \\ &\quad + E[(X-t)^+|X \le t]P(X \le t) \\ &= E[(X-t)^+|X > t]e^{-\lambda t} \\ &= \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

所以

$$E[\min(X, t)] = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}.$$

于是

$$E[P] = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t} - ct.$$

微分后可得当 $se^{-\lambda t} - c = 0$，即 $t = \frac{1}{\lambda}\ln(s/c)$ 时利润最大.

如果存货能以每千克 $r(r < \min(s, c))$ 元的价格退回，和前面讨论类似，我们可以得到 $E[P]$ 的表达式

$$\begin{aligned} E[P] &= sE[\min(X, t)] - ct + rE[(t - X)^+] \\ &= sE[\min(X, t)] - ct + r(t - E[\min(X, t)]) \\ &= \frac{s - r}{\lambda} + \frac{r - s}{\lambda}e^{-\lambda t} - (c - r)t. \end{aligned}$$

微分后可求得最佳订购量是

$$t = \frac{1}{\lambda}\ln(\frac{s - r}{c - r}). \qquad \square$$

习题 4. 课本 P24 习题 1.8.

证明. 见课本 P299. $\square$