第 2 次作业

截止日期：3 月 10 日

习题 1. 设您口袋里有 N 枚硬币，其中 N 是一个随机数，服从参数为 λ 的 Poisson 分布. 现在您抛掷这些硬币，设每一枚硬币正面朝上的概率为 p. 证明正面朝上的硬币数服从参数为 λp 的 Poisson 分布.

证明. 记 M 表示正面朝上的硬币数，则

$$\begin{aligned}
P(M=i) &= \sum_{n=i}^{\infty} P(M=i|N=n)P(N=n) \\
&= \sum_{n=i}^{\infty} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \\
&= \sum_{n=i}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{(\lambda(1-p))^{n-i}}{(n-i)!} \frac{(\lambda p)^i}{i!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{(\lambda(1-p))^{n}}{n!} \frac{(\lambda p)^i}{i!} \\
&= e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^i}{i!}
\end{aligned}$$

于是正面朝上的硬币数服从参数为 λp 的 Poisson 分布. □

习题 2. 课本 P32 练习 2.1(2).

证明. 当 $0 \le s < t$ 时，有

$$\begin{aligned}
P(N(s)=k|N(t)=n) &= \frac{P(N(s)=k, N(t)=n)}{P(N(t)=n)} \\
&= \frac{P(N(s)=k, N(t)-N(s)=n-k)}{P(N(t)=n)} \\
&= \frac{\frac{(\lambda s)^k}{k!} e^{-\lambda s} \frac{(\lambda(t-s))^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\lambda(t-s)}}{\frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{s^k (t-s)^{n-k}}{t^n} \\
&= C_n^k (\frac{s}{t})^k (\frac{s-t}{t})^{n-k},\ k=0,1,\cdots,n.
\end{aligned}$$

□

习题 3. 课本 P32 练习 2.1(3).

解. 对 $s>0$，由独立增量性我们有

$$\begin{aligned}
E[N(t)N(t+s)] &= E[N(t)(N(t+s)-N(t)+N(t))] \\
&= E[N(t)(N(t+s)-N(t))] + E[N(t)^2] \\
&= E[N(t)]E[N(t+s)-N(t)] + E[N(t)^2] \\
&= \lambda t\lambda s + \lambda t + (\lambda t)^2 \\
&= (\lambda t)^2 + \lambda t(\lambda s + 1).
\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}
E[N(t+s)|N(t)] &= E[N(t+s)-N(t)+N(t)|N(t)] \\
&= E[N(t+s)-N(t)|N(t)] + N(t) \\
&= \lambda s + N(t).
\end{aligned}$$

□