第 2 讲 Poisson 过程

定义 1.1

我们称一个随机变量 X 服从参数 λ 的 **Poisson 分布**，如果 X 的分布列为

$$P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!},\ k=0,1,2,\cdots.$$

我们记 $X \sim \text{Pois}(\lambda)$.

设 $X \sim \text{Pois}(\lambda)$，我们有：

$$
\begin{aligned}
E[X] &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{ie^{-\lambda}\lambda^i}{i!} \\
&= \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{i-1}}{(i-1)!} \\
&= \lambda e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} \\
&= \lambda.
\end{aligned}
$$

为求其方差，我们首先计算 $E[X^2]$：

$$\begin{aligned}
E[X^2] &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i^2 e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} \\
&= \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i e^{-\lambda}\lambda^{i-1}}{(i-1)!} \\
&= \lambda \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+1) e^{-\lambda}\lambda^{j}}{j!} \\
&= \lambda \Big[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{j e^{-\lambda}\lambda^{j}}{j!} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{j}}{j!} \Big] \\
&= \lambda(\lambda+1).
\end{aligned}$$

最后一个等式是因为第一项和式是一个参数 λ 的 Poisson 分布的期望值，而第二项合适是一个参数 λ 的 Poisson 分布的概率和. 从而我们有

$$\mathrm{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \lambda.$$

定理 1.2

如果 $X \sim \mathrm{Bin}(n, p_n)$，满足当 $n \to \infty$ 时，有 $np_n \to \lambda$. 那么

$$P(X = k) \to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

证明.

记 $\lambda_n = np_n$，则

$$P(n=k) = \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k}$$
$$= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} (\frac{\lambda_n}{n})^k (1-\frac{\lambda_n}{n})^{n-k}$$
$$= \frac{\lambda_n^k}{k!} (1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n})(1-\frac{\lambda_n}{n})^{n-k}.$$

由于对固定的 k 有 $\lim_{n\to\infty} \lambda_n^k = \lambda^k$，$\lim_{n\to\infty}(1-\frac{\lambda_n}{n})^{n-k} = e^{-\lambda}$ 以及

$$\lim_{n\to\infty} (1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n}) = 1,$$

从而我们有

$$P(X=k) \to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

□

计数过程

我们用 $N(t)$ 表示时间段 $[0,t]$ 内某类事件发生的个数，则对每个固定的 t, $N(t)$ 是随机变量. $\{N(t):t\geq 0\}$ 构成了一个随机过程，我们称之为**计数过程**. 我们后面将其简记为 $\{N(t)\}$.

计数过程满足如下的条件：

(1) 对 $t\geq 0$， $N(t)$ 是取非负整数值的随机变量；

(2) 对于 $t>s\geq 0$， $N(t)\geq N(s)$；

(3) 对于 $t>s\geq 0$， $N(t)-N(s)$ 是时间段 $(s,t]$ 中的事件发生数；

(4) $\{N(t)\}$ 的轨迹是单调不减右连续 (即对任意 $t\geq 0$， $\lim_{s\searrow t}N(s)=N(t)$) 的阶梯函数.

(5) $\{N(t)\}$ 的轨迹具有左极限，即对任意 $t>0$， $\lim_{s\nearrow t}N(s)$ 存在.

对于计数过程 $\{N(t)\}$，用 $N(s,t]$ 表示区间 $(s,t]$ 内发生的事件数，则有

$$N(s,t] = N(t) - N(s),\ \ s < t.$$

如果在互不相交的时间段内发生时间的个数是相互独立的，严格地说是指对任何正整数 n 以及

$$0 \le t_1 < t_2 < \cdots < t_n,$$

随机变量

$$N(0), N(0,t_1], N(t_1,t_2], \cdots, N(t_{n-1},t_n]$$

相互独立，那么相应的计数过程 $\{N(t)\}$ 具有独立增量性.
如果在长度相等的时间段内，事件发生个数的概率分布是相同的，即指对任意 $s > 0$，$t_2 > t_1 \ge 0$，随机变量 $N(t_1,t_2]$ 与 $N(t_1+s, t_2+s]$ 同分布，则计数过程具有平稳增量过程.

定义 3.1

称满足下面条件的计数过程 $\{N(t)\}$ 是强度为 λ 的 **Poisson 过程**:

(1) $N(0)=0$;

(2) $\{N(t)\}$ 是独立增量过程;

(3) 对于任意 $t,s\geq 0$, $N(s,t+s]$ 服从参数为 λt 的泊松分布，即

$$P(N(s,t+s]=k)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t},\ k=0,1,\cdots, \tag{3.1}$$

其中的正常数 λ 称为泊松过程 $\{N(t)\}$ 的 强度 或速率.

上述定义中的 (3) 说明泊松过程是平稳增量过程，而且时间段 $(s, s+t]$ 中发生的事件个数服从泊松分布.
设 $\{N(t)\}$ 是强度为 λ 的泊松过程，容易计算

$$E[N(t)] = \lambda t,\ \mathrm{Var}(N(t)) = \lambda t.$$

于是

$$\lambda = \frac{EN(t)}{t}$$

是单位时间内事件发生的平均数. λ 越大，单位时间平均发生的事件越多. 这正是称 λ 为 Poisson 过程的强度的原因.

定义 3.2

我们称函数 f 当 $h \to 0$ 时是 $o(h)$ 的，如果

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} = 0.$$

定义 3.3

设 $\lambda > 0$ 是常数. 如果计数过程 $\{N(t)\}$ 满足以下条件，则称它是强度为 λ 的泊松过程:

(1) $N(0) = 0$;

(2) $N(t)$ 是独立增量过程，有平稳增量性;

(3) 对任意 $t \geq 0$，当正数 $h \to 0$ 时有

$$\begin{cases} P(N(h) = 1) = \lambda h + o(h), \\ P(N(h) \geq 2) = o(h). \end{cases}$$

注记 3.4

由上面定义中的 (3) 可以得出:

$$
\begin{aligned}
P(N(h)=0) &= 1-P(N(h)\geq 1)\\
&= 1-P(N(h)=1)-P(N(h)\geq 2)\\
&= 1-\lambda h+o(h).
\end{aligned}
$$

定理 3.5

定义 3.1 和定义 3.3 等价.

证明.

首先我们由定义 3.3 推导定义 3.1. 设 $\{N(t)\}$ 满足定义 3.3，只需证明 (3.1) 成立. 对确定的正数 t，将区间 $(0,t]$ 进行 n 等分，每段长为 t/n，等分点是

$$t_j = \frac{jt}{n},\ j = 0, 1, \cdots, n.$$

用 $Y_j = N(t_{j-1}, t_j]$ 表示第 j 个区间 $(t_{j-1}, t_j]$ 中的事件数，则 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 独立同分布，并且

$$P(Y_j \geq 2) = o(t_j - t_{j-1}) = o(t/n),$$

$$p_n \equiv P(Y_j = 1) = \lambda t/n + o(t/n),$$

$$q_n \equiv P(Y_j = 0) = 1 - P(Y_j \geq 1) = 1 - \lambda t/n + o(t/n).$$

证明.

对非负整数 k，引入事件

$$A_n = \{有\ k\ 个\ Y_j = 1，其余的\ Y_j = 0；\ 1 \le j \le n\},$$

$$B_n = \{\sum_{j=1}^{n} Y_j = k，至少有一个\ Y_j \ge 2\},$$

则有 $B_n \subset \bigcup_{j=1}^{n}\{Y_j \ge 2\}$, $A_n \cap B_n = \emptyset$.

证明.

当 $n \to \infty$ 时，

$$P(B_n) \le P(\bigcup_{j=1}^{n}\{Y_j \ge 2\}) \le nP(Y_j \ge 2) = no(t/n) \to 0.$$

$$np_n = n(\lambda t/n + o(t/n)) \to \lambda t, \ q_n \to 1,$$

$$\begin{aligned} q_n^n &= (1 - \lambda t/n + o(t/n))^n = (1 - \frac{\lambda t}{n} + o(t/n))^n \\ &= (1 - \frac{\lambda t}{n})^n (1 + \frac{o(t/n)}{1 - \lambda t/n})^n \to e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

证明.

所以利用 $\{N(0,t] = k\} = \{\sum_{j=1}^n Y_j = k\} = A_n \cup B_n$ 我们有

$$\begin{aligned}
P(N(s,s+t] = k) &= P(N(0,t] = k) \\
&= P(A_n \cup B_n) = \lim_{n\to\infty} [P(A_n) + P(B_n)] \\
&= \lim_{n\to\infty} P(A_n) = \lim_{n\to\infty} C_n^k p_n^k q_n^{n-k} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{k!}[n(n-1)\cdots(n-k+1)p_n^k] q_n^{n-k} \\
&= \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}.
\end{aligned}$$

证明.

接下来我们由定义 3.1 推导定义 3.3. 应用 Taylor 公式我们有

$$\begin{aligned} P(N(h)=1) &= \lambda h e^{-\lambda h} = \lambda h(1-\lambda h+o(h)) \\ &= \lambda h + o(h), \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} P(N(h)\geq 2) &= 1-P(N(h)=0)-P(N(h)=1) \\ &= 1-e^{-\lambda h}-\lambda h e^{-\lambda h} \\ &= 1-[1-\lambda h+o(h)]-[\lambda h+o(h)] \\ &= o(h). \end{aligned}$$

□

我们也可以利用建立微分方程的方法来由定义 3.3 推导定义 3.1. 记
$P_n(t) = P(N(t) = n),\ n = 0, 1, 2, \cdots,$
$P(h) = P(N(h) \geq 1) = P_1(h) + P_2(h) + \cdots = 1 - P_0(h)$，则

$$\begin{aligned} P_0(t+h) &= P(N(t+h) = 0) \\ &= P(N(t+h) - N(t) = 0, N(t) = 0) \\ &= P(N(t) = 0) P(N(t+h) - N(t) = 0) \\ &= P_0(t) P_0(h) \\ &= P_0(t)(1 - \lambda h + o(h)). \end{aligned}$$

因此

$$\frac{P_0(t+h) - P_0(t)}{h} = -\lambda P_0(t) + \frac{o(h)}{h}.$$

令 $h \to 0$，我们有 $P_0'(t) = -\lambda P_0(t)$. 解此微分方程，我们有 $P_0(t) = Ke^{-\lambda t}$，其中 K 为常数. 由 $P_0(0) = P(N(0) = 0) = 1$ 我们有 $K = 1$，所以

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}.$$

类似地，当 $n \geq 1$ 时，有

$$\begin{aligned}
P_n(t+h) &= P(N(t+h) = n) \\
&= P(N(t) = n, N(t+h) - N(t) = 0) \\
&\quad + P(N(t) = n-1, N(t+h) - N(t) = 1) \\
&\quad + P(N(t+h) = n, N(t+h) - N(t) \geq 2) \\
&= P_n(t)P_0(h) + P_{n-1}(t)P_1(h) + o(h) \\
&= (1 - \lambda h)P_n(t) + \lambda h P_{n-1}(t) + o(h),
\end{aligned}$$

于是

$$\frac{P_n(t+h)-P_n(t)}{h}=-\lambda P_n(t)+\lambda P_{n-1}(t)+\frac{o(h)}{h}.$$

令 $h\to 0$，我们有

$$P_n'(t)=-\lambda P_n(t)+\lambda P_{n-1}(t).$$

于是 $e^{\lambda t}[P_n'(t)+\lambda P_n(t)]=\lambda e^{\lambda t}P_{n-1}(t)$，即

$$\frac{d}{dt}[e^{\lambda t}P_n(t)]=\lambda e^{\lambda t}P_{n-1}(t).$$

- 下面应用数学归纳法来证明 $P_n(t) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$.
- 当 $n = 1$ 时，$\frac{d}{dt}[e^{\lambda t}P_1(t)] = \lambda e^{\lambda t}P_0(t) = \lambda e^{\lambda t}e^{-\lambda t} = \lambda$，且有 $P_1(0) = 0$，求解微分方程可得 $P_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$.
- 进一步，假设 $P_{n-1}(t) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$ 成立，则有

$$\frac{d}{dt}[e^{\lambda t}P_n(t)] = \lambda e^{\lambda t}P_{n-1}(t) = \lambda e^{\lambda t}\cdot e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!},$$

  并且 $P_n(0) = 0$.
- 求解微分方程可得 $P_n(t) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$.

由条件 (2) 我们知该计数过程具有平稳独立增量，故对一切 $s \geq 0$ 以及 $t > 0$，均有

$$P(N(t+s) - N(s) = n) = P(N(t) = n) = P_n(t) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

于是 (3.1) 成立.

设 $(N_t : t \geq 0)$ 是以 $\alpha > 0$ 为参数的 Poisson 过程.

定理 4.1

当 $t \to \infty$ 时几乎必然地有 $N_t/t \to \alpha$.

证明.

记 $\xi_k := N_k - N_{k-1}$，则 $\{\xi_k\}$ 是独立同分布随机变量序列且服从参数为 α 的 Poisson 分布. 注意 $N_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ 且 $\mathbf{E}(\xi_k) = \mathbf{Var}(\xi_k) = \alpha$. 由强大数定律，当 $n \to \infty$ 时几乎必然地有 $N_n/n \to \alpha$. 注意

$$\frac{\lfloor t \rfloor}{t} \frac{N_{\lfloor t \rfloor}}{\lfloor t \rfloor} \leq \frac{N_t}{t} \leq \frac{\lfloor t \rfloor + 1}{t} \frac{N_{\lfloor t \rfloor + 1}}{\lfloor t \rfloor + 1}.$$

注意到

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\lfloor t \rfloor}{t} = \lim_{t \to \infty} \frac{\lfloor t \rfloor + 1}{t} = 1.$$

所以当 $t \to \infty$ 时几乎必然地有 $N_t/t \to \alpha$. $\square$

定理 4.2

对于任何 $x \in \mathbb{R}$，当 $t \to \infty$ 时有

$$\mathbf{P}\Big(\frac{N_{\alpha t} - \alpha t}{\sqrt{\alpha t}} \leq x\Big) \to \Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2} dy.$$

证明.

令 $\xi_k := N_k - N_{k-1}$，对 $\{\xi_k\}$ 应用中心极限定理，当 $n \to \infty$ 时有

$$\mathbf{P}\Big(\frac{N_n - \alpha n}{\sqrt{\alpha n}} \le x\Big) \to \Phi(x).$$

注意

$$\frac{N_t - \alpha t}{\sqrt{\alpha t}} = \frac{N_t - N_{t-\lfloor t\rfloor} - \alpha\lfloor t\rfloor}{\sqrt{\alpha t}} + \frac{N_{t-\lfloor t\rfloor} - \alpha(t - \lfloor t\rfloor)}{\sqrt{\alpha t}},$$

其中 $N_t - N_{t-\lfloor t\rfloor}$ 与 $N_{\lfloor t\rfloor}$ 同分布. 所以由我们知当 $t \to \infty$ 时有

$$\mathbf{P}\Big(\frac{N_t - N_{t-\lfloor t\rfloor} - \alpha\lfloor t\rfloor}{\sqrt{\alpha\lfloor t\rfloor}} \le x\Big) = \mathbf{P}\Big(\frac{N_{\lfloor t\rfloor - \alpha\lfloor t\rfloor}}{\sqrt{\alpha\lfloor t\rfloor}} \le x\Big) \to \Phi(x),$$

证明.

进而

$$\mathbf{P}\left(\frac{N_t - N_{t-\lfloor t\rfloor} - \alpha\lfloor t\rfloor}{\sqrt{\alpha\lfloor t\rfloor}} \leq \varepsilon\right) \to \Phi(x).$$

再注意到当 $t \to \infty$ 时,

$$\left|\frac{N_{t-\lfloor t\rfloor} - \alpha(t - \lfloor t\rfloor)}{\sqrt{\alpha t}}\right| \leq \frac{N_1 + \alpha}{\sqrt{\alpha t}} \to 0, \ \ a.s..$$

所以结论成立. □