第 3 讲 Poisson 呼叫流

设 $\{N(t)\}$ 是强度为 λ 的 Poisson 过程. 定义 $S_0 = 0$. 用 S_n 表示第 n 个事件发生的时刻，简称为第 n 个到达时或第 n 个呼叫时. 由于呼叫时 $S_1, S_2, \cdots$ 依次到达，所以又称 $\{S_j\}$ 是 Poisson 过程 $\{N(t)\}$ 的呼叫流.

设 $\{S_j\}$ 是 Poisson 过程 $\{N(t)\}$ 的呼叫流. 我们不难看出事件 $\{N(t) \geq n\}$ 和 $\{S_n \leq t\}$ 都表示 $[0, t]$ 内至少有 n 个呼叫，$\{N(t) = n\}$ 和 $\{S_n \leq t < S_{n+1}\}$ 都表示 $[0, t]$ 内恰有 n 个呼叫. 于是

$$\{N(t) \geq n\} = \{S_n \leq t\}, \tag{1.1}$$

$$\{N(t) = n\} = \{S_n \leq t < S_{n+1}\}.$$

例 1.1

设 $\{S_j\}$ 是泊松过程 $\{N(t)\}$ 的呼叫流. 对于 $s_1 < s_2 < \cdots$ 以及 $i = 1, 2, \cdots$, 定义

$$A_i = \{N(s_{i-1}, s_i] = 0\},$$

$$B_i = \{N(s_{i-1}, s_i] = 2\},$$

则 $A_1, B_2, A_3, B_4, \cdots$ 相互独立，并且我们有

$$\{S_1 > s_1\} = \{N(s_0, s_1] = 0\} = A_1,$$

$$\{S_1 > s_1, S_2 \le s_2\} = A_1\{N(s_1, s_2] \ge 2\},$$

$$\{S_1 > s_1, S_2 \le s_2, S_3 > s_3\} = A_1 B_2\{N(s_2, s_3] = 0\} = A_1 B_2 A_3,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\{S_1 > s_1, S_2 \le s_2, \cdots, S_{2k-1} > s_{2k-1}\} = A_1 B_2 \cdots B_{2k-2} A_{2k-1},$$

以及

$$P(A_i) = \exp(-\lambda(s_i - s_{i-1})),$$

$$P(B_i) = \frac{\lambda^2 (s_i - s_{i-1})^2}{2} \exp(-\lambda(s_i - s_{i-1})).$$

先计算 S_n 的密度函数. 首先由 (1.1) 我们可以得到 S_n 的分布函数

$$F_n(t) = P(S_n \le t) = P(N(t) \ge n)$$
$$= 1 - P(N(t) < n) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}.$$

函数 $F_n(t)$ 连续，在 $(0, \infty)$ 中可导，求导数得到 S_n 的密度函数

$$f_n(t) = F_n'(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \lambda e^{-\lambda t} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} \lambda e^{-\lambda t}$$
$$= \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \lambda e^{-\lambda t} = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} t^{n-1} e^{-\lambda t},\ t \ge 0.$$

于是 $S_n \sim \Gamma(n, \lambda)$ 服从参数为 n, λ 的 *Gamma* 分布.

为了得到 $(S_1, S_2, \cdots, S_n)$ 的联合密度，先做一些准备. 设 $F(x,y) = P(X \le x, Y \le y)$，$G(x,y) = P(X > x, Y \le y)$，则由

$$G(x,y) = P(Y \le y) - F(x,y)$$

我们知在混合偏导数存在的地方有

$$\frac{\partial^2 G(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}[P(Y \le y) - F(x,y)] = -\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y \partial x}.$$

一般地，我们有如下引理.

引理 2.1

设 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是 $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的联合分布函数，

$$G_k(x_1, x_2, \cdots, x_n) = P(X_1 > x_1, X_2 \le x_2, \cdots, X_{2k-1} > x_{2k-1}, \\ X_j \le x_j, 2k \le j \le n).$$

则在 G_k 存在 n 阶连续混合偏导数的区域内，F 存在 n 阶连续混合偏导数，并且

$$\frac{\partial^n F(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\partial x_n \partial x_{n-1} \cdots \partial x_1} = (-1)^k \frac{\partial^n G_k(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\partial x_n \partial x_{n-1} \cdots \partial x_1}.$$

证明.

对 k 作归纳法. 容易验证当 $k=1$ 时结论成立. 设上式对于 k 成立，由

$$\{X_{2k+1} > x_{2k+1}\} = \{X_{2k+1} > -\infty\} - \{X_{2k+1} \le x_{2k+1}\}$$

我们有

$$\begin{aligned}
&G_{k+1}(x_1, x_2, \cdots, x_n)\\
=&P(X_1 > x_1, X_2 \le x_2, \cdots, X_{2k+1} > x_{2k+1}, X_j \le x_j, 2k+2 \le j \le n)\\
=&P(X_1 > x_1, X_2 \le x_2, \cdots, X_{2k+1} > -\infty, X_j \le x_j, 2k+2 \le j \le n)\\
&- G_k(x_1, x_2, \cdots, x_n).
\end{aligned}$$

上式两边先对 x_{2k+1} 求偏导数，然后对其它的 x_j 求偏导数，交换求导数的次序后得到所求等式对 $k+1$ 成立. □

定理 2.2

设随机向量 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 有联合分布函数 $F(\boldsymbol{x})=F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. $F(\boldsymbol{x})$ 在 $\mathbb{R}^n$ 的开区域 D 中有连续的 n 阶混合偏导数. 定义

$$f(\boldsymbol{x})=\begin{cases}\frac{\partial^n F(\boldsymbol{x})}{\partial x_n\cdots\partial x_2\partial x_1}, & \boldsymbol{x}\in D,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

若下面的条件 (a), (b) 之一成立:

(a) $P(\boldsymbol{X}\in D)=1$;

(b) $\int_D f(\boldsymbol{x})dx_1dx_2\cdots dx_n=1$.

则 $f(\boldsymbol{x})$ 是 $\boldsymbol{X}$ 的联合密度.

下面讨论 $(s_1, s_2, \cdots, s_n)$ 的联合分布. 设 $0 < s_1 < s_2 \cdots < s_n$，我们将利用例 1.1 的符号和结论. 对 $n = 2k-1$，

$$
\begin{aligned}
& G(s_1, s_2, \cdots, s_n) \\
=& P(S_1 > s_1, S_2 \leq s_2, S_3 > s_3, \cdots, S_{n-1} \leq s_{n-1}, S_n > s_n) \\
=& P(A_1 B_2 \cdots B_{n-1} A_n) \\
=& P(A_1) P(B_2) \cdots P(B_{n-1}) P(A_n) \\
=& e^{-\lambda s_1} \frac{(\lambda(s_2 - s_1))^2}{2} e^{-\lambda(s_2 - s_1)} e^{-\lambda(s_3 - s_2)} \cdot \ldots \\
& \cdot \frac{(\lambda(s_{n-1} - s_{n-2}))^2}{2} e^{-\lambda(s_{n-1} - s_{n-2})} e^{-\lambda(s_n - s_{n-1})} \\
=& \lambda^{n-1} \frac{(s_2 - s_1)^2 (s_4 - s_3)^2 \cdots (s_{n-1} - s_{n-2})^2}{2^{k-1}} e^{-\lambda s_n}.
\end{aligned}
$$

于是 $G(s_1, s_2, \cdots, s_n)$ 在开区域 $D = \{(s_1, s_2, \cdots, s_n) | 0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_n\}$ 中连续，并有连续的 n 阶混合偏导数

$$
\begin{aligned}
g(s_1, s_2, \cdots, s_n) &= (-1)^k \frac{\partial^n G(s_1, s_2, \cdots, s_n)}{\partial s_n \partial s_{n-1} \cdots \partial s_1} \\
&= \lambda^n e^{-\lambda s_n}, \ (s_1, s_2, \cdots, s_n) \in D.
\end{aligned}
$$

由于 $P((S_1, S_2, \cdots, S_n) \in D) = 1$，所以由引理 2.1 和定理 2.2 我们知 $g(s_1, s_2, \cdots, s_n)$ 是 $(S_1, S_2, \cdots, S_n)$ 的联合密度.

对于 $n=2k$ 可以通过类似的推导得到相应的结果. 对 $n=2k$，我们有

$$
\begin{aligned}
&G(s_1, s_2, \cdots, s_n) \\
=&P(S_1 > s_1, S_2 \leq s_2, S_3 > s_3, \cdots, S_{n-1} > s_{n-1}, S_n \leq s_n) \\
=&P(A_1 B_2 \cdots B_{n-2} A_{n-1} \{N(s_{n-1}, s_N] \geq 2\}) \\
=&P(A_1) P(B_2) \cdots P(B_{n-2}) P(A_{n-1}) P(\{N(s_{n-1}, s_N] \geq 2\}) \\
=&\lambda^{n-2} \frac{(s_2 - s_1)^2 (s_4 - s_3)^2 \cdots (s_{n-2} - s_{n-3})^2}{2^{k-1}} e^{-\lambda s_n} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{\lambda^j (s_n - s_{n-1})^j}{j!}.
\end{aligned}
$$

于是和前面类似的讨论我们知 $G(s_1,s_2,\cdots,s_n)$ 在开区域 $D=\{(s_1,s_2,\cdots,s_n)|0<s_1<s_2<\cdots<s_n\}$ 中连续，并有连续的 n 阶混合偏导数

$$
\begin{aligned}
& g(s_1,s_2,\cdots,s_n) \\
=&(-1)^k\frac{\partial^n G(s_1,s_2,\cdots,s_n)}{\partial s_n\partial s_{n-1}\cdots\partial s_1} \\
=&\lambda^{n-2}\frac{-\partial(e^{-\lambda s_n}\sum_{j=2}^{\infty}\frac{\lambda^j(s_n-s_{n-1})^j}{j!})}{\partial s_{n-1}\partial s_n} \\
=&\lambda^{n-2}\frac{\partial(e^{-\lambda s_n}\sum_{j=2}^{\infty}\frac{\lambda^j(s_n-s_{n-1})^{j-1}}{(j-1)!})}{\partial s_n} \\
=&\lambda^{n-1}\frac{\partial(e^{-\lambda s_n}(e^{\lambda(s_n-s_{n-1})}-1))}{\partial s_n} \\
=&\lambda^n e^{-\lambda s_n},\ (s_1,s_2,\cdots,s_n)\in D.
\end{aligned}
$$

由于 $P((S_1,S_2,\cdots,S_n)\in D)=1$，所以由引理 2.1 和定理 2.2 我们知 $g(s_1,s_2,\cdots,s_n)$ 是 $(S_1,S_2,\cdots,S_n)$ 的联合密度.

定理 2.3

设 $\{S_j\}$ 是强度为 λ 的泊松过程的呼叫流，则对 $n \geq 1$，

(1) $(S_1, S_2, \cdots, S_n)$ 有联合密度

$$g(s_1, s_2, \cdots, s_n) = \lambda^n e^{-\lambda s_n},\ 0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_n;$$

(2) S_n 服从 $\Gamma(n, \lambda)$ 分布，有密度函数

$$g_n(s) = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} s^{n-1} e^{-\lambda s},\ s \geq 0.$$

等待间隔 X_n 的分布

设 $\{S_n\}$ 是泊松过程 $\{N(t)\}$ 的呼叫流，我们记

$$X_n = S_n - S_{n-1},\ n = 1, 2, \cdots ,$$

则 X_n 是 $n-1$ 个事件发生后，等待第 n 个事件发生的等待间隔，称为第 n 个 等待间隔.

对于随机向量 $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \cdots , X_n)$，$\boldsymbol{Y} = (Y_1, Y_2, \cdots , Y_m)$. 定义 $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = (X_1, X_2, \cdots , X_n, Y_1, Y_2, \cdots , Y_m)$. 以后用 $\boldsymbol{X} \sim f(\boldsymbol{x})$ 表示 $\boldsymbol{X}$ 有联合密度 $f(\boldsymbol{x})$，用 $\boldsymbol{Y} \sim g(\boldsymbol{y})$ 表示 $\boldsymbol{Y}$ 有联合密度 $g(\boldsymbol{y})$.

定理 3.1

设 $\boldsymbol{X} \sim f(\boldsymbol{x})$，则

(1) X_j 有密度函数

$$f_j(x_j) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(\boldsymbol{x}) dx_1 \cdots dx_{j-1} dx_{j+1} \cdots dx_n,$$

并且 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立的充分必要条件是

$$f(\boldsymbol{x}) = \prod_{j=1}^{n} f_j(x_j), \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n;$$

(2) 当 $\boldsymbol{Y} \sim g(\boldsymbol{y})$ 时，$\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 相互独立的充分必要条件是

$$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) \sim f(\boldsymbol{x}) g(\boldsymbol{y});$$

(3) 当 $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ 都是离散随机向量时，$\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 相互独立的充分必要条件是对所有的 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$，有

$$P(\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}, \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{y}) = P(\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}) P(\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{y}).$$

引理 3.2

设 $\boldsymbol{S}=(S_1,S_2,\cdots,S_n)$ 有联合密度 $g(\boldsymbol{x})$，$\boldsymbol{X}=(u_1(\boldsymbol{S}),u_2(\boldsymbol{S}),\cdots,u_n(\boldsymbol{S}))$ 是 $\boldsymbol{S}$ 的函数，D 是 $\mathbb{R}^n$ 的区域使得 $P(\boldsymbol{X}\in D)=1$. 如果有 D 上的 n 维向量值函数 $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{x})$，使得

(a) 对 $\boldsymbol{x}\in D$，有 $\{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}\}=\{\boldsymbol{S}=\boldsymbol{s}(\boldsymbol{x})\}$；

(b) $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{x})$ 是 D 到其值域的可逆映射，偏导数连续，雅可比行列式的绝对值

$$\left|\frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial \boldsymbol{x}}\right|\neq 0,\ \boldsymbol{x}\in D,\ i=1,2,\cdots,m.$$

则 $\boldsymbol{X}$ 有联合密度

$$f(\boldsymbol{x})=\begin{cases} g(\boldsymbol{s}(x))\left|\frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial \boldsymbol{x}}\right|, & x\in D,\\ 0, & x\notin D.\end{cases}$$

定理 3.3

泊松过程 $\{N(t)\}$ 的等待间隔 $X_1, X_2, \cdots$ 是来自指数总体 $\mathcal{E}(\lambda)$ 的相互独立的随机变量.

定理 3.4

泊松过程 $\{N(t)\}$ 的等待间隔 $X_1, X_2, \cdots$ 是来自指数总体 $\mathcal{E}(\lambda)$ 的相互独立的随机变量.

证明.

由于 $(S_1, S_2, \cdots, S_n)$ 是连续型随机向量，所以 $X_j = S_j - S_{j-1}$ 是连续型随机变量，满足 $P(X_j > 0) = 1$. 引入

$$\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_n),\ \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n),$$

$$S = (S_1, S_2, \cdots, S_n),\ \boldsymbol{s} = (s_1, s_2, \cdots, s_n),$$

$$D = \{\boldsymbol{x} | x_j > 0, 1 \le j \le n\},$$

证明.

对于 $\boldsymbol{x} \in D$ 以及 $s_j = x_1 + x_2 + \cdots + x_j, 1 \le j \le n$, 有

(a) $\{\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}\} = \{\boldsymbol{S} = \boldsymbol{s}\}$;

(b) $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}(\boldsymbol{x})$ 是 D 到值域 $A_n = \{\boldsymbol{s} | 0 < s_1 < \cdots < s_n\}$ 的可逆映射，偏导数连续并满足

$$|\frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial \boldsymbol{x}}| = 1, \ \boldsymbol{x} \in D,$$

根据引理 3.2 得到 $\boldsymbol{X}$ 的联合密度

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{s}) = \lambda^n e^{-\lambda s_n} &= \lambda^n e^{-\lambda(x_1+x_2+\cdots+x_n)} \\ &= \prod_{j=1}^{n} \lambda e^{-\lambda x_i} = \prod_{j=1}^{n} f_j(x_j), \ \boldsymbol{x} \in D, \end{aligned}$$

其中 $f_j(x_j) = \lambda e^{-\lambda x_j} (x_j > 0)$ 是 X_j 的边缘密度. 再由定理 3.1 我们知它们相互独立.

到达时刻的条件分布

对于 $n = 1, 2, \cdots$，引入

$$\boldsymbol{s}_n = (s_1, s_2, \cdots, s_n),\ A_n = \{\boldsymbol{s}_n | 0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_n < t\}.$$

定理 4.1

在条件 $N(t) = n(> 0)$ 下，$\boldsymbol{S}_n = (S_1, S_2, \cdots, S_n)$ 有联合密度

$$h_n(\boldsymbol{s}_n) = \frac{n!}{t^n}, s_n \in A_n.$$

证明.

由定理 2.3 知道 $\boldsymbol{S}_{n+1} = \ S_1, S_2, \cdots, S_{n+1})$ 有联合密度函数

$$g_{n+1}(\boldsymbol{s}_{n+1}) = \lambda^{n+1} e^{-\lambda s_{n+1}}, \ 0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_{n+1}.$$

对于 $s_n \in A_n$，我们得到条件分布函数

$$\begin{aligned}
H_n(\boldsymbol{s}_n) &= P(S_j \le s_j, 1 \le j \le n | N(t) = n) \\
&= \frac{1}{P(N(t) = n)} P(S_j \le s_j, 1 \le j \le n; N(t) = n) \\
&= \frac{1}{P(N(t) = n)} P(S_j \le s_j, 1 \le j \le n; S_n \le t, S_{n+1} > t) \\
&= \frac{n!}{(\lambda t)^n} e^{\lambda t} P(S_j \le s_j, 1 \le j \le n; S_{n+1} > t) \\
&= \frac{n!}{(\lambda t)^n} e^{\lambda t} \int_0^{s_1} \int_0^{s_2} \cdots \int_0^{s_n} \int_t^{\infty} g_{n+1}(t_1, t_2. \cdots, t_{n+1}) dt_{n+1} dt_n \cdots dt_1.
\end{aligned}$$

证明.

$H_n(\boldsymbol{s}_n)$ 在 A_n 上有连续的 n 阶混合偏导数. 由 $P(\boldsymbol{S}_n \in A_n | N(t) = n) = 1$ 以及定理 2.2 知道对 $H_n(s_n)$ 依次求偏导得到 $\boldsymbol{S}_n = (S_1, \cdots, S_n)$ 的条件联合密度

$$\begin{aligned} h_n(\boldsymbol{s}_n) &= \frac{\partial^n H_n(\boldsymbol{s}_n)}{\partial s_n \cdots \partial s_2 \partial s_1} \\ &= \frac{n!}{(\lambda t)^n} e^{\lambda t} \int_0^{s_1} \int_0^{s_2} \cdots \int_0^{s_n} \int_t^{\infty} g_{n+1}(t_1, t_2, \cdots, t_{n+1}) dt_{n+1} \\ &= \frac{n!}{(\lambda t)^n} e^{\lambda t} \int_t^{\infty} \lambda^{n+1} e^{-\lambda t_{n+1}} dt_{n+1} \\ &= \frac{n!}{t^n} e^{\lambda t} \int_t^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt \\ &= \frac{n!}{t^n}, \quad 0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_n < t. \end{aligned}$$

从而得证. □

现设 U 在 $[0,t]$ 上均匀分布，$U_1, U_2, \cdots, U_n$ 是来自总体 U 的随机变量，则他们的从小到大次序统计量 $(U_{(1)}, U_{(2)}, \cdots, U_{(n)})$ 有联合密度

$$h_n(u_1, u_2, \cdots, u_n) = \frac{n!}{t^n}, \ 0 < u_1 < u_2 < \cdots < u_n < t.$$

所以已知 $[0,t]$ 内有 n 个事件发生的条件下，以 $V_1, V_2, \cdots, V_n$ 表示这 n 个时间的发生时刻时，$V_1, V_2, \cdots, V_n$ 的次序统计量 $(S_1, S_2, \cdots, S_n)$ 与 $(U_{(1)}, U_{(2)}, \cdots, U_{(n)})$ 同分布.

设 X, Y 是随机变量，A 是随机事件. 如果在 A 发生的条件下，X 的条件分布与 Y 的分布相同，即 $P(X \le x|A) = P(Y \le x)$，$x \in \mathbb{R}$，则称 $Z|A$ 和 Y 同分布. 所以 $(S_1, \cdots, S_n)|N(t) = n$ 和 $(U_{(1)}, U_{(2)}, \cdots, U_{(n)})$ 同分布.

推论 4.2

设 $U \sim U[0, t]$，$U_1, U_2, \cdots, U_n$ 是来自总体 U 的随机变量，$h(s)$ 是实值 (可测) 函数，则

(1) $\sum_{i=1}^n S_i|N(t) = n$ 和 $\sum_{i=1}^n U_i$ 同分布;

(2) $\sum_{i=1}^n h(S_i)|N(t) = n$ 和 $\sum_{i=1}^n h(U_i)$ 同分布;

(3) 当 $Eh(U)$ 存在时，$E(\sum_{i=1}^n h(S_i)|N(t) = n) = nEh(U)$.

证明.

(1) 因为 $(S_1, S_2, \cdots, S_n)|N(t) = n$ 和 $(U_{(1)}, U_{(2)}, \cdots, U_{(n)})$ 同分布，所以 $\sum_{i=1}^n S_i|N(t) = n$ 和 $\sum_{i=1}^n U_i$ 同分布；

(2) 同理得 $\sum_{i=1}^n h(S_i)|N(t) = n$ 和 $\sum_{i=1}^n h(U_i) = \sum_{i=1}^n h(U_{(i)})$ 同分布；

(3) 同分布的随机变量有相同的数学期望，所以有

$$E(\sum_{i=1}^n h(S_i)|N(t) = n) = \sum_{i=1}^n E[h(U_i)] = nEh(U).$$

□

如果 $\{Y_j\}$ 是来自指数总体 $\mathcal{E}(\lambda)$ 的随机变量，就称

$$\xi_n = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n,\ n = 1, 2, \cdots$$

是简单呼叫流. 定理 3.3 说明泊松过程的呼叫流 $\{S_n\}$ 是简单呼叫流. 简单呼叫流又称为泊松流.

设 $\{\xi_n\}$ 是简单呼叫流，认为每个呼叫时刻 ξ_n 有一个事件 (呼叫) 发生，相应的计数过程记做 $\{M(t)\}$. 下面说明 $\{M(t)\}$ 是强度为 λ 的泊松过程. 由于 $M(t) = m$ 的充分必要条件是恰有 m 个 $\{\xi_j \le t\}$ 发生，于是可以用简单呼叫流 $\{\xi_n\}$ 将计数过程 $\{M(t)\}$ 表达出来:

$$M(t) = \sum_{j=1}^{\infty} I[\xi_j \le t], t \in [0, \infty).$$

这里 $I[A]$ 是事件 A 的示性函数.

对于强度为 λ 的泊松过程 $\{N(t)\}$ 及其呼叫流 $\{S_n\}$，也有

$$N(t) = \sum_{j=1}^{\infty} I[S_j \le t],\ t \in [0,\infty).$$

由 $\{\xi_n\}$ 和 $\{S_n\}$ 同分布知道对 $n \ge 1$ 和 $0 \le t_1 < t_2 < \cdots < t_n$,

$$(M(t_1), M(t_2), \cdots, M(t_n)) \text{ 与 } (N(t_1), N(t_2), \cdots, N(t_n))$$

同分布. 从而我们知 $\{M(t)\}$ 也是强度为 λ 的泊松过程.

注记 5.1

所以，我们有如下给出泊松过程的第三种定义：泊松过程是简单呼叫流所对应的计数过程.

例 5.2

汽车按照强度为 λ 的泊松流通过广场，第 i 辆汽车通过时造成的空气污染为 D_i. 污染随着时间减弱，经过时间 s 减弱为 $D_i e^{-as}$，其中正常数 a 称为扩散常数. 假设 $D_1, D_2, \cdots$ 是来自总体 D 的随机变量，且与泊松流独立. 计算 $[0, t]$ 内通过的汽车在 t 时造成的平均污染 (即造成的污染的期望值).

解.

用 $\{N(t)\}$ 表示所述的泊松过程，用 S_i 表示第 i 辆汽车的通过时间. $[0,t]$ 内通过了 $N(t)$ 辆汽车，造成 t 时的污染是

$$D(t)=\sum_{i=1}^{N(t)} D_i e^{-a(t-S_i)}.$$

注意由假设 D_i 与 $N(t),S_i$ 独立. 利用推论 4.2 的结论得到

证明.

$$
\begin{aligned}
E(D(t)|N(t)=n) &= \sum_{i=1}^{n} E(D_i e^{-a(t-S_i)}|N(t)=n) \\
&= \sum_{i=1}^{n} E(D_i e^{-at})E(a^{aS_i}|N(t)=n) \\
&= E(De^{-at})E(\sum_{i=1}^{n} a^{aS_i}|N(t)=n) \\
&= E(De^{-at})E\sum_{i=1}^{n} e^{aU_i} \\
&= EDe^{-at}\frac{n}{at}(e^{at}-1) \\
&= \frac{nED}{at}(1-e^{-at}).
\end{aligned}
$$

证明.

于是

$$E(D(t)|N(t)) = \frac{N(t)ED}{at}(1 - e^{-at}).$$

最后得到

$$E(D(t)) = \frac{E(N(t))E(D)}{at}(1 - e^{-at}) = \frac{\lambda E(D)}{a}(1 - e^{-\lambda t}).$$

□

- 容易看出，$E[D(t)]$ 和强度 λ 以及单辆汽车的平均污染 $E[D]$ 成正比.
- 因为 $D(t)$ 关于 a 递减，所以 $E[D(t)]$ 也是 a 的减函数.
- 扩散常数越大，平均污染 $E[D(t)]$ 越小.
- 当时间 t 充分大后，空气污染就稳定在 $\lambda E[D]/a$ 附近.