第 5 讲 Poisson 过程的汇合与分流

例 1.1

如果 $Z_0, Z_1, \cdots$ 是独立同分布的随机变量，定义 $X_n = Z_0 + Z_1 + \cdots + Z_n$，证明 $\{X_n, n = 0, 1, \cdots\}$ 是平稳独立增量过程.

证明.

(1) 先证对任意给定的 k 个时刻 $0 \leq n_1 < n_2 < \cdots < n_k$，随机变量 $X_{n_2} - X_{n_1}, X_{n_3} - X_{n_2}, \cdots, X_{n_k} - X_{n_{k-1}}$ 相互独立. 事实上，由于 $Z_0, Z_1, \cdots$ 是相互独立的随机变量，所以

$$X_{n_{i+1}} - X_{n_i} = \sum_{l=n_i+1}^{n_{i+1}} Z_i,\ \ i = 1, 2, \cdots$$

也相互独立.

证明.

(2) 再证 $\{X_n, n=0,1,\cdots\}$ 有平稳增量，即证明对任意给定的两个时刻 $0 \le n_1 < n_2$ 以及整数 $l > 0$，随机变量 $X_{n_1+l} - X_{n_1}$ 与 $X_{n_2+l} - X_{n_2}$ 有相同分布. 由 $Z_0, Z_1, \cdots$ 同分布知它们有相同的特征函数，记为 $\phi_{Z_1}(t)$. 再由 $Z_0, Z_1, \cdots$ 的独立性，我们有

$$X_{n_1+l} - X_{n_1} = \sum_{l=n_1+1}^{n_1+l} Z_l \text{ 与 } X_{n_2+l} - X_{n_2} = \sum_{l=n_2+1}^{n_2+l} Z_l$$

有相同的特征函数 $[\phi_Z(u)]^l$，利用随机变量特征函数唯一确定其分布的性质，我们知 $X_{n_1+l} - X_{n_1}$ 与 $X_{n_2+l} - X_{n_2}$ 有相同分布.

综上，$\{X_n, n=0,1,\cdots\}$ 是平稳独立增量过程. $\square$

1. 习题讲解
2. 泊松过程的汇合
3. 泊松过程的分流

回顾：Poisson 过程

定义 2.1

设 $\lambda > 0$ 是常数. 如果计数过程 $\{N(t)\}$ 满足以下条件，则称它是强度为 λ 的泊松过程：

(1) $N(0) = 0$;

(2) $N(t)$ 是独立增量过程，有平稳增量性；

(3) 对任意 $t \geq 0$，当正数 $h \to 0$ 时有

$$\begin{cases} P(N(h) = 1) = \lambda h + o(h), \\ P(N(h) \geq 2) = o(h). \end{cases}$$

定理 2.2

设 $\{N_1(t)\}$ 和 $\{N_2(t)\}$ 是相互独立的、强度分别为 λ_1 和 λ_2 的泊松过程，则

$$N(t) = N_1(t) + N_2(t),\ t \geq 0$$

是强度为 $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ 的泊松过程.

证明.

只需验证定义 2.1 的 (1)，(2) 和 (3). 因为 $\{N_1(t)\}$ 和 $\{N_2(t)\}$ 满足定义 2.1 的 (1)，(2) 和 (3)，所以有

$$N(0) = N_1(0) + N_2(0) = 0 + 0 = 0.$$

于是 (1) 成立. 对于任何正整数 n 以及 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$，由 $\{N_1(t)\}$ 和 $\{N_2(t)\}$ 的独立增量性以及 $\{N_1(t)\}$ 和 $\{N_2(t)\}$ 是相互独立的我们知

$$N_1(t_{j-1}, t_j],\ N_2(t_{j-1}, t_j],\ j = 1, 2, \cdots, n$$

相互独立. 于是

$$N(t_{j-1}, t_j] = N_1(t_{j-1}, t_j] + N_2(t_{j-1}, t_j],\ j = 1, 2, \cdots, n$$

相互独立，所以 $\{N(t)\}$ 是独立增量过程.

证明.

又因为 $N_1(t_1, t_2]$ 和 $N_1(t_1+s, t_2+s]$ 同分布，$N_2(t_1, t_2]$ 和 $N_2(t_1+s, t_2+s]$ 同分布，所以 $N(t_1, t_2] = N_1(t_1, t_2] + N_2(t_1, t_2]$ 与

$$N(t_1+s, t_2+s] = N_1(t_1+s, t_2+s] + N_2(t_1+s, t_2+s]$$

同分布. 所以 $\{N(t)\}$ 是平稳增量过程. 于是 (2) 成立.

证明.

下面验证普通性：设 $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$. 我们有当 $h \to 0$ 时，

$$
\begin{aligned}
P(N(h)=1) &= P(N_1(h)=1, N_2(h)=0) \\
&\quad + P(N_1(h)=0, N_2(h)=1) \\
&= P(N_1(h)=1)P(N_2(h)=0) \\
&\quad + P(N_1(h)=0)P(N_2(h)=1) \\
&= (\lambda_1 h + o(h))(1-\lambda_2 h + o(h)) \\
&\quad + (\lambda_2 h + o(h))(1-\lambda_1 h + o(h)) \\
&= (\lambda_1+\lambda_2)h + o(h) = \lambda h + o(h).
\end{aligned}
$$

证明.

$$
\begin{aligned}
P(N(h)=0) &= P(N_1(h)=0, N_2(h)=0) \\
&= (1-\lambda_1 h + o(h))(1-\lambda_2 h + o(h)) \\
&= 1-(\lambda_1+\lambda_2)h + o(h) = 1-\lambda h + o(h).
\end{aligned}
$$

于是得到

$$
\begin{aligned}
P(N(h)\geq 2) &= 1 - P(N(h)=0) - P(N(h)=1) \\
&= 1 - [1-\lambda h + o(h)] - [\lambda h + o(h)] = o(h).
\end{aligned}
$$

于是 (3) 成立. $\square$

应用归纳法我们知

推论 2.3

设 $\{N_j(t)\}(j=1,2,\cdots,m)$ 是相互独立的，强度分别为 λ_j 的泊松过程，则

$$N(t)=N_1(t)+N_2(t)+\cdots+N_m(t),\ \ t\geq 0$$

是强度为 $\lambda=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_m$ 的泊松过程.

上面推论所描述的性质称为泊松过程的可加性.

- 设旅客按照强度为 λ 的泊松过程到达长途汽车站，每次到达的旅客乘 A 线的概率是 p，乘 B 线的概率为 $q = 1 - p$，且与到达时间独立，也与其他的到达行为独立.
- 用 $N_1(t)$ 表示时间 $[0, t]$ 内乘 A 线的旅客到达次数，用 $N_2(t)$ 表示时间 $[0, t]$ 内乘 B 线的旅客到达次数.
- 因为旅客选择 A 线还是 B 线仅由他自己决定，与其他旅客的行为无关. 所以前往 A 线的旅客流与前往 B 线的旅客流是独立的，也就是说计数过程 $\{N_1(t)\}$ 和 $\{N_2(t)\}$ 应当是相互独立的.
- 用 λ_1 和 λ_2 分别表示他们的强度，于是 $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$.

引入独立同分布的随机变量

$$Y_j = \begin{cases} 1, & \text{当第 } j \text{ 次到达乘 A 线}, \\ 0, & \text{当第 } j \text{ 次到达乘 B 线}, \end{cases} \tag{3.1}$$

则有

$$P(Y_j = 1) = p,\ P(Y_j = 0) = q,\ j = 1, 2, \cdots .$$

如果已知在时刻 $[0,t]$ 内有 $N(t)=n$ 次到达，则 $[0,t]$ 内有 $\sum_{j=1}^{n} Y_j$ 次到达是乘 A 线的. 当在时刻 $[0,t]$ 内有 $N(t)$ 次到达，则有

$$N_1(t)=\sum_{j=1}^{N(t)} Y_j \tag{3.2}$$

次到达是乘 A 线的. 同理有

$$N_2(t)=\sum_{j=1}^{N(t)} (1-Y_j) \tag{3.3}$$

次到达是乘 B 线的.
这里和以后对 $a<b$，我们总是规定 $\sum_{j=b}^{a}(\cdot)=0$. 对于 $k<0$ 或 $k>n$，总规定 $C_n^k=0$.

定理 3.1

设 $\{N(t)\}$ 是强度为 λ 的泊松过程，$\{Y_j\}$ 是独立同分布的随机序列，服从两点分布 (3.1). 计数过程 $\{N_1(t)\}$ 和 $\{N_2(t)\}$ 分别由 (3.2) 和 (3.3) 定义. 如果 $\{Y_j\}$ 与 $\{N(t)\}$ 独立，则 $\{N_1(t)\}$ 与 $\{N_2(t)\}$ 相互独立，分别是强度为 $\lambda_1 = \lambda p$ 和 $\lambda_2 = \lambda q$ 的泊松过程.

在上面定理中，$\{N_1(t)\}$ 和 $\{N_2(t)\}$ 被称为 $N(t)$ 的 分流过程.

证明.

对于 $0 \le s < t$，

$$N_1(s,t] = N_1(t) - N_1(s) = \sum_{j=N(s)+1}^{N(t)} Y_j \tag{3.4}$$

是时刻 $(s,t]$ 内乘 A 线的乘客数. 因为 $\{Y_j\}$ 与 $\{N(t)\}$ 独立，对于 $k \ge l$，容易计算出

$$\begin{aligned} P(N_1(s,t] = n | N(s) = l, N(t) = k) &= P(\sum_{j=l+1}^{k} Y_j = n | N(s) = l, N(t) = k) \\ &= P(\sum_{j=l+1}^{k} Y_j = n) = P(\sum_{j=1}^{k-l} Y_j = n) \\ &= g(k-l, n), \end{aligned}$$

其中 $g(k-l,n) = P(\sum_{j=l}^{k} Y_j = n)$ 满足 $g(1,1) = p$ 以及对任意 $n \ge 1$，$g(0.n) = 0$.

证明.

由条件概率的定义我们知

$$P(N_1(s,t]=n|N(s),N(t))=g(N(s,t],n).$$

对上式求期望得到

$$P(N_1(s,t]=n)=E[g(N(s,t],n)].$$

我们证明 $\{N_1(t)\}$ 为强度 $\lambda_1=\lambda p_1$ 的泊松过程，我们验证定义 2.1 中的条件 (1)，(2)，(3).

(1) $N_1(0)=\sum_{j=1}^{0} Y_j=0.$

证明.

(2) 独立增量性: 对任意正整数 m，$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_m$ 以及整数 $0 = n_0 \le n_1 \le n_2 \le \cdots \le n_m$，定义

$$\boldsymbol{N} = (N(t_1), N(t_2), \cdots, N(t_m)), \ \boldsymbol{n} = (n_1, n_2, \cdots, n_m).$$

从 (3.4) 知道，在条件 $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{n}$ 下，随机变量

$$N_1(t_{j-1}, t_j] = \sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j} Y_i, \ j = 1, 2, \cdots, m$$

相互独立.

证明.

于是得到

$$
\begin{aligned}
& P(N_1(t_{j-1}, t_j] = k_j, 1 \le j \le m | \boldsymbol{N} = \boldsymbol{n}) \\
=& P(\sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j} Y_i = k_i, 1 \le j \le m | \boldsymbol{N} = \boldsymbol{n}) \\
=& P(\sum_{i=1}^{n_1} Y_i = k_1) P(\sum_{i=n_1+1}^{n_2} Y_i = k_2) \cdots P(\sum_{i=n_{m-1}+1}^{n_m} Y_i = k_m) \\
=& g(n_1, k_1) g(n_2 - n_1, k_2) \cdots g(n_m - n_{m-1}, k_m).
\end{aligned}
$$

按条件概率的定义我们知

$$
\begin{aligned}
& P(N_1(t_{j-1}, t_j] = k_j, 1 \le j \le m | \boldsymbol{N}) \\
=& g(N(t_1), k_1) g(N(t_1, t_2], k_2) \cdots g(N(t_{m-1}, t_m], k_m).
\end{aligned}
$$

证明.

对于上式求数学期望，利用 $\{N(t)\}$ 的独立增量性我们知

$$
\begin{aligned}
&P(N_1(t_{j-1},t_j]=k_j, 1\le j\le m)\\
=&E[g(N(t_1),k_1)]E[g(N(t_1,t_2],k_2)]\cdots E[g(N(t_{m-1},t_m],k_m)]\\
=&P(N_1(t_0,t_1]=k_1)P(N_1(t_1,t_2]=k_2)\cdots P(N_1(t_{m-1},t_m]=k_m).
\end{aligned}
$$

这说明随机变量 $N_1(t_{j-1},t_j](1\le j\le n)$ 相互独立. 于是 $\{N_1(t)\}$ 是独立增量过程.

证明.

平稳增量性：因为 $N(t_1,t_2]$ 和 $N(t_1+s,t_2+s]$ 同分布，所以我们知对任意 $n\in\mathbb{N}$，有

$$\begin{aligned} P(N(t_1,t_2]=n) &= Eg(N(t_1,t_2],n) \\ &= E(N(t_1+s,t_2+s],n) \\ &= P(N(t_1+s,t_2+s]=n) \end{aligned}$$

于是 $N_1(t_1,t_2]$ 和 $N_1(t_1+s,t_2+s]$ 同分布.

证明.

(3) 普通性: 注意到 $g(0,1)=0$, $g(1,1)=p$ 以及

$$g(N(t,t+h],1)I[N(t,t+h]=1]=\begin{cases} 0 & N(t,t+h]\neq 1 \text{ 时}, \\ g(1,1) & N(t,t+h]=1 \text{ 时}, \end{cases}$$

我们有

$$\begin{aligned} P(N_1(t,t+h]=1) &= E[g(N(t,t+h],1)] \\ &= E[g(N(t,t+h],1)(I[N(t,t+h]=1]+I[N(t,t+h]\geq 2])] \\ &= g(1,1)P(N(t,t+h]=1)+o(h) \\ &= p(\lambda h+o(h))+o(h)=p\lambda h+o(h). \end{aligned}$$

证明.

因为 $N_1(s,t] \le N(s,t]$ 对 $s<t$ 成立，故由

$$P(N_1(t,t+h] \ge 2) \le P(N(t,t+h] \ge 2) = o(h)$$

我们有 $P(N_1(t,t+h] \ge 2) = o(h)$.

综上我们知 $\{N_1(t)\}$ 是强度为 λp 的泊松过程. 完全对称地可以证明 $\{N_2\}$ 是强度为 λq 的泊松过程.

证明.

下面证明 $\{N_1(t)\}$ 和 $\{N_2(t)\}$ 相互独立. 我们只需要证明对于任何 $n \geq 1$, $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, 随机变量

$$(N_1(t_1), N_1(t_2), \cdots, N_1(t_n)) \text{ 和 } (N_2(t_1), N_2(t_2), \cdots, N_2(t_n))$$

独立. 对于整数

$$0 = k_0 \leq k_1 \leq k_2 \leq \cdots \leq k_n, \ 0 = m_0 \leq m_1 \leq m_2 \leq \cdots \leq m_n,$$

引入 $n_j = k_j + m_j$, $\boldsymbol{n} = (k_1 + m_1, k_2 + m_2, \cdots, \cdots, k_n + m_n)$. 随机变量

$$\xi_j = \sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j} Y_i, \ j = 1, 2, \cdots, n$$

相互独立.

证明.

注意 ξ_j 服从二项分布 $\mathcal{B}(n_j - n_{j-1}, p)$，我们可以得到

$$
\begin{aligned}
& P(N_1(t_j) = k_j, N_2(t_j) = m_j; 1 \le j \le n) \\
=& P(N_1(t_j) = k_j, N(t_j) = n_j; 1 \le j \le n) = P(N_1(t_{j-1}, t_j] = k_j - k_{j-1}, N(t_j) = n_j; 1 \le j \le n) \\
=& P(\xi_j = k_j - k_{j-1}, N(t_{j-1}, t_j] = n_j - n_{j-1}; 1 \le j \le n) \\
=& \prod_{j=1}^{n} [P(\xi_j = k_j - k_{j-1}) P(N(t_{j-1}, t_j] = n_j - n_{j-1})] \\
=& \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{(n_j - n_{j-1})!}{(k_j - k_{j-1})!(m_j - m_{j-1})!} p^{k_j - k_{j-1}} q^{m_j - m_{j-1}} \cdot \frac{[\lambda(t_j - t_{j-1})]^{n_j - n_{j-1}}}{(n_j - n_{j-1})!} e^{-\lambda(t_j - t_{j-1})} \right] \\
=& \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{[\lambda p(t_j - t_{j-1})]^{k_j - k_{j-1}}}{(k_j - k_{j-1})!} e^{-\lambda p(t_j - t_{j-1})} \frac{[\lambda q(t_j - t_{j-1})]^{m_j - m_{j-1}}}{(m_j - m_{j-1})!} e^{-\lambda q(t_j - t_{j-1})} \right] \\
=& P(N_1(t_j) = k_j, 1 \le j \le n) P(N_2(t_j) = m_j, 1 \le j \le n).
\end{aligned}
$$

这说明 $(N_1(t_1), N_1(t_2), \cdots, N_1(t_n))$ 和 $(N_2(t_1), N_2(t_2), \cdots, N_2(t_n))$ 独立. □

定理 3.2

设旅客按强度为 λ 的泊松过程到达某长途汽车站，每次到达的旅客以概率 p_i 前往 A_i 线，且前往哪个路线与到达时间独立，也与其他的到达行为独立. 用 $N_i(t)$ 表示 $[0,t]$ 内前往 A_i 线的到达次数时，$\{N_i(t)\}$ 是强度 $\lambda_i = p_i\lambda$ 的泊松过程. 当 $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$ 时，这 n 个泊松过程是相互独立的.

例 3.3

汽车按 Poisson 流驶向立体立交桥. 经过调查知道，由东面每分钟平均驶入 6 辆汽车，由南面每分钟平均驶入 6.5 辆汽车，由西面平均每分钟平均驶入 9 辆汽车，由北面平均每分钟平均驶入 8.5 辆汽车. 在桥 A 上，每辆车向左或向右转向行驶的概率是 0.3，直行的概率是 0.35，掉头行驶的概率是 0.05. 计算各个方向上，离开立交桥的汽车流的车流强度.

证明.

用 $\{N_1(t)\}$ 表示由东面驶入的汽车流. 根据题意，每分钟平均驶入 $E[N_1(t, t+1]] = 6$ 辆汽车. 所以 Poisson 过程 $\{N_1(t)\}$ 的强度是 $\lambda_1 = 6$ (辆/分钟). 根据 Poisson 过程的可分解性，东面驶入的车流 $\{N_1(t)\}$ 分流给东、南、西、北的分流强度分别是 $0.05\lambda_1$，$0.3\lambda_1$，$0.35\lambda_1$，$0.3\lambda_1$. 完全类似地可以列出其他方向的汽车流的分流情况，列入下面的分流表:

证明.

方向	向东分流	向南分流	向西分流	向北分流
东面驶入 $\lambda_1 = 6.0$	$0.05\lambda_1$	$0.30\lambda_1$	$0.35\lambda_1$	$0.30\lambda_1$
南面驶入 $\lambda_2 = 6.5$	$0.30\lambda_2$	$0.05\lambda_2$	$0.30\lambda_2$	$0.35\lambda_2$
西面驶入 $\lambda_3 = 9.0$	$0.35\lambda_3$	$0.30\lambda_3$	$0.05\lambda_3$	$0.30\lambda_3$
北面驶入 $\lambda_4 = 8.5$	$0.30\lambda_4$	$0.35\lambda_4$	$0.30\lambda_4$	$0.05\lambda_4$
驶出强度 (辆 / 分钟)	$\lambda_E = 7.95$	$\lambda_S = 7.80$	$\lambda_W = 7.05$	$\lambda_N = 7.20$

表中最后一行表示各个方向驶出立交桥的车流强度，是其所在列各分流强度之和.
所有的分流都是 Poisson 流. $\square$

例 3.4

从时刻 $t=0$ 开始，客户按强度为 λ 的泊松流点击一个网站. 每个客户点击后的浏览时间是相互独立的，有共同的分布函数 $G(t)$. 用 $N_1(t)$ 表示 t 时刻已经离线的客户数，用 $N_2(t)$ 表示 t 时在线的客户数，则 $N_1(t)$ 和 $N_2(t)$ 是两个相互独立的泊松随机变量，分别有数学期望

$$E[N_1(t)]=\lambda\int_0^t G(s)ds,\ E[N_2(t)]=\lambda\int_0^t \overline{G}(s)ds,$$

其中 $\overline{G}(s)=1-G(s)$.

证明.

对于一个客户来讲，用 S 表示他进入网站的时间，用 A 表示他 t 时已经离线，用 Y 表示他的在线时间. 对于 $s \leq t$，有

$$P(A|S=s) = P(Y \leq t-s) = G(t-s).$$

因为在 $S \leq t$ 条件下，S 在 $[0,t]$ 内均匀分布，且 $P_t(A) \equiv P(A|S \leq t)$ 是概率，所以

$$\begin{aligned}
p = P_t(A) &= \int_0^t P_t(A|S=s)dP_t(S \leq s) \\
&= \int_0^t P(A|S \leq t, S=s)dP(S \leq s|S \leq t) \\
&= \frac{1}{t}\int_0^t P(A|S=s)ds = \frac{1}{t}\int_0^t G(t-s)ds = \frac{1}{t}\int_0^t G(s)ds, \\
q = P(A^c|S \leq t) &= 1-p = \frac{1}{t}\int_0^t \bar{G}(s)ds.
\end{aligned}$$

证明.

每个在时刻 $[0,t]$ 内进入网站的人在 t 时离线的概率是 p，在线的概率是 q，与其他客户的行为独立. 用 $\{N(t)\}$ 表示所述的泊松过程，利用二项分布得到

$$P(N_1(t)=k, N_2(t)=j|N(t)=k+j)=C_{k+j}^{k}p^kq^j.$$

于是得到

$$\begin{aligned}P(N_1(t)=k, N_2(t)=j) &= P(N(t)=k+j)P(N_1(t)=k, N_2(t)=j|N(t)=k+j)\\ &= P(N(t)=k+j)C_{k+j}^{k}p^kq^j\\ &= \frac{(\lambda tp)^k}{k!}e^{-\lambda tp}\frac{(\lambda tq)^j}{j!}e^{-\lambda tq}.\end{aligned}$$

证明.

分别对 j,k 求和，就得到边缘分布

$$P(N_1(t)=k)=\frac{(\lambda tp)^k}{k!}e^{-\lambda tp},\ P(N_2(t)=j)=\frac{(\lambda tq)^j}{j!}e^{-\lambda tq}.$$

这说明 $N_1(t),N_2(t)$ 是相互独立的泊松随机变量，分别有数学期望 λtp 和 λtq，即有

$$E[N_1(t)]=\lambda tp=\lambda\int_0^t G(s)ds,\ E[N_2(t)]=\lambda tq=\lambda\int_0^t \overline{G}(s)ds.$$

从而得证. □

用 $b_G = \inf\{s|G(s)=1\}$ 表示 $G(t)$ 的右端点，用 μ_G 表示 $G(t)$ 的数学期望. 当 $t \geq b_G$ 时，

$$E[N_2(t)] = \lambda \int_0^{b_G} \overline{G}(s)ds = \lambda \mu_G,$$

$$E[N_1(t)] = E[N(t)] - E[N_2(t)] = \lambda(t - \mu_G),$$

这说明 $t \geq b_G$ 后，在线的客户平均数稳定在 $e[N_2(t)] = \lambda\mu_G$. 在 $(b_G, b_G + t]$ 中离线的客户数

$$N_3(t) = N_1(t + b_G) - N_1(b_G),\ t \geq 0$$

有数学期望

$$E[N_3(t)] = E[N_1(t + b_G)] - E[N_1(b_G)] = \lambda t.$$