

第 6 讲 复合泊松过程

- 1 复合 Poisson 过程
- 2 复合泊松过程的参数估计
- 3 条件 Poisson 过程

1 复合 Poisson 过程

2 复合泊松过程的参数估计

3 条件 Poisson 过程

例 1.1

某零件在运行过程中受到撞击. 用 $N(t)$ 表示 $(0, t]$ 时间段内该零件受到的撞击次数, 经验表明 $N = (N(t), t \geq 0)$ 是参数为 $\lambda > 0$ 的 Poisson 过程. 每次撞击会给零件带来一定的磨损, 其磨损量大小是随机的, 分布函数为 $G(x)$. 假设各次磨损量为 $\xi_1, \xi_2, \dots$, 具有分布函数 $G(x)$, 并且相互独立. 一个基本问题是: $(0, t]$ 内该零件的磨损总量是多少?

这个数至关重要, 它直接影响零件的使用寿命, 决定什么时候需要更换零件. 根据上述假设, $(0, t]$ 内磨损总量为

$$Z(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} \xi_i.$$

我们再来看一个例子. 如果已知 $[0, t]$ 内有 $N(t) = n$ 次到达, 则 $[0, t]$ 内到达的旅客数是 $\sum_{j=1}^n Z_j$. 当 $[0, t]$ 内有 $N(t)$ 次到达, 则 $[0, t]$ 内到达的旅客数为

$$M(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} Z_j \quad (1.1)$$

为复合泊松过程. 记 $E[M(t)]$ 为 $[0, t]$ 内平均到达的旅客数, $\text{Var}[M(t)]$ 为 $[0, t]$ 内到达的旅客数的方差.

已知 $N(t) = n$ 时, $M(t)$ 有条件数学期望

$$E[M(t)|N(t) = n] = E\left[\sum_{j=1}^n Z_j | N(t) = n\right] = E\left[\sum_{j=1}^n Z_j\right] = nE[Z_j] = n\mu.$$

于是得到 $E[M(t)|N(t)] = N(t)\mu$. 再求数学期望得到

$$E[M(t)] = E[E[M(t)|N(t)]] = E[N(t)]\mu = \lambda t\mu.$$

$M(t)^2$ 有条件数学期望

$$\begin{aligned} E[M^2(t)|N(t) = n] &= E[(\sum_{j=1}^n Z_j)^2|N(t) = n] = E[(\sum_{j=1}^n Z_j)^2] \\ &= \text{Var}[\sum_{j=1}^n Z_j] + (E[\sum_{j=1}^n Z_j])^2 \\ &= n\sigma^2 + (n\mu)^2. \end{aligned}$$

所以有

$$E[M^2(t)|N(t)] = N(t)\sigma^2 + N^2(t)\mu^2.$$

两边再求数学期望, 利用 $E[N(t)] = \text{Var}[N(t)] = \lambda t$, $E[N^2(t)] = \lambda t + (\lambda t)^2$, 我们有

$$E[M^2(t)] = E[N(t)]\sigma^2 + E[N^2(t)]\mu^2 = \lambda t\sigma^2 + [\lambda t + (\lambda t)^2]\mu^2.$$

最后得到

$$\text{Var}[M(t)] = E[M^2(t)] - (E[M(t)])^2 = \lambda t\sigma^2 + \lambda t\mu^2.$$

定理 1.2

设 $\{N(t)\}$ 是强度为 λ 的泊松过程, $\{Z_j\}$ 是相互独立的随机序列, 有共同的数学期望 $\mu = E[Z_j]$ 和方差 $\sigma^2 = \text{Var}[Z_j]$, 并且和 $\{N(t)\}$ 独立, 复合泊松过程 $\{M(t)\}$ 由 (1.1) 定义, 则

- (1) $E[M(t)] = \lambda t \mu$;
- (2) 当 $\sigma^2 < \infty$ 时, $\text{Var}[M(t)] = \lambda t (\sigma^2 + \mu^2)$.

例 1.3

假定在股票交易市场, 股票交易次数是以 λ 为速率的 Poisson 过程. 记第 k 次与第 $k-1$ 次易手前后股票价格的变化为 Y_k . 不妨假定 $Y_1, Y_2, \dots$ 是独立同分布的随机变量且与 $N(t)$ 独立, 而 $X(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k$ 则代表时刻 t 时股票的总价格变化. 设 Y_1 的分布为 $G(y)$, 则

$$P(Y_1 + Y_2 \leq y) = \int_{-\infty}^{\infty} G(y-z) dG(z),$$

称为 G 与 G 自身的卷积, 记为 $G * G(y)$ 或 $G^{(2)}(y)$. 类似地, $G^{(n)}(y) = G * \dots * G(y)$, 称为 G 自身的 n 重卷积. 有了上面的记号, 我们不难求出 $X(t)$

的分布:

$$\begin{aligned}
 P(X(t) \leq x) &= P\left(\sum_{k=1}^{N(t)} Y_k \leq x\right) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} P\left(\sum_{k=1}^{N(t)} Y_k \leq x \mid N(t) = n\right) P(N(t) = n) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} P\left(\sum_{k=1}^n Y_k \leq x\right) \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} G^{(n)}(x).
 \end{aligned}$$

例 1.4: (例 1.1 续)

假设各次磨损量和撞击次数相互独立, 并且每次磨损量是参数为 $\beta > 0$ 的指数随机变量. 根据零件设计标准, 如果磨损总量大于 $\alpha > 0$, 那么需要更换零件; 否则影响安全运行, 求该零件的平均寿命.

解.

令 η 为零件的寿命, 它是随机变量. 对任意 $t > 0$,

$$\eta > t \Leftrightarrow Z(t) \leq \alpha.$$

所以

$$P(\eta > t) = P(Z(t) \leq \alpha).$$

由分部积分公式得

$$\begin{aligned} E\eta &= \int_0^{\infty} P(\eta > t) dt \\ &= \int_0^{\infty} P(Z(t) \leq \alpha) dt \\ &= \int_0^{\infty} P\left(\sum_{i=1}^{N(t)} \xi_i \leq \alpha\right) dt. \end{aligned}$$

解.

由于 $N = (N(t), t \geq 0)$ 和 $(\xi_n, n \geq 1)$ 相互独立, 根据全概率公式

$$P\left(\sum_{i=1}^{N(t)} \xi_i \leq \alpha\right) = \sum_{n=0}^{\infty} P\left(\sum_{i=1}^n \xi_i \leq \alpha\right) P(N(t) = n).$$

令

$$\tilde{N}(t) = \max \left\{ n \geq 0 : \sum_{i=1}^n \xi_i \leq t \right\},$$

$(\tilde{N}(t), t \geq 0)$ 是参数为 $\beta > 0$ 的 Poisson 过程. 特别,

$$P\left(\sum_{i=1}^n \xi_i \leq \alpha\right) = P(\tilde{N}(\alpha) \geq n) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\alpha^k \beta^k}{k!} e^{-\alpha\beta}.$$

解.

我们有

$$\begin{aligned}
 E\eta &= \int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty \sum_{k=n}^\infty \frac{\alpha^k \beta^k}{k!} e^{-\alpha\beta} \frac{\lambda^n t^n}{n!} e^{-\lambda t} dt \\
 &= \sum_{n=0}^\infty \sum_{k=n}^\infty \int_0^\infty \frac{\alpha^k \beta^k}{k!} e^{-\alpha\beta} \frac{\lambda^n t^n}{n!} e^{-\lambda t} dt \\
 &= \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^\infty \sum_{k=n}^\infty \frac{\alpha^k \beta^k}{k!} e^{-\alpha\beta} \\
 &= \frac{1}{\lambda} \sum_{n=k}^\infty (k+1) \frac{\alpha^k \beta^k}{k!} e^{-\alpha\beta} \\
 &= \frac{1 + \alpha\beta}{\lambda}.
 \end{aligned}$$



复合泊松过程的参数估计

对于由 (1.1) 定义的复合泊松过程

$$M(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} Z_j, \quad t \geq 0$$

得到观测值 $M(t)$ 后, 利用 $E[M(t)] = \lambda t \mu$, 得到 $\mu = E[M(t)/\lambda t]$. 如果有了 λ 的最大似然估计 $\hat{\lambda}$, 则可以利用

$$\hat{\mu} = \frac{M(t)}{\hat{\lambda} t}$$

作为 μ 的估计. 关于 $\hat{\mu}$ 的强相合性, 只介绍下面的定理.

定理 2.1

设 $\{N(t)\}$ 是强度为 λ 的泊松过程, $\{Z_j\}$ 是独立同分布的随机序列, 与 $\{N(t)\}$ 独立, 则符合泊松过程 $\{M(t)\}$ 是独立增量过程和平稳增量过程, 并且当 $E[|Z_j|] < \infty$ 时, $\hat{\mu} \rightarrow \mu$ a.s..

定义 3.1

设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是一个计数过程. 设 Λ 是一个分布函数为 $F_\Lambda(\lambda)$ 的非负随机变量. 如果对任意 $\lambda \geq 0$, 在已知 $\Lambda = \lambda$ 的条件下 $\{N(t)\}$ 是一个强度为 λ 的泊松过程, 即

$$P(N(t+s) - N(s) = k | \Lambda = \lambda) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}, \quad k \geq 0,$$

则称 $\{N(t)\}$ 为**条件 Poisson 过程**.

设 $\{N(t)\}$ 是条件 Poisson 过程, 不难计算

$$P(N(t+s) - N(s) = k) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} dF_{\Lambda}(\lambda), \quad k \geq 0.$$

我们可以用 Bayes 的观点来看条件 Poisson 过程：通常 Poisson 过程的强度很难被准确估计，因此可以把它视为一个随机变量，先验分布设为 $F_\Lambda(\lambda)$ 。我们需要利用 $\{N(t)\}$ 的数据 (信息) 不断推测 (估计) Λ 的后验分布信息，如果知道的实际数据 (信息) 为 $N(t+s) - N(s) = k$ ，则相应的后验分布函数为

$$\begin{aligned} & P(\Lambda \leq x | N(t+s) - N(s) = k) \\ &= \frac{P(\Lambda \leq x, N(t+s) - N(s) = k)}{P(N(t+s) - N(s) = k)} \\ &= \frac{\int_0^x e^{-\lambda t} (\lambda t)^k dF_\Lambda(\lambda)}{\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} (\lambda t)^k dF_\Lambda(\lambda)}, \quad x > 0, \quad k \geq 0. \end{aligned}$$