

第 7 讲非时齐泊松过程

1 非时齐泊松过程

2 非时齐泊松过程的参数估计

3 习题讲解

定义 1.1

如果计数过程 $\{N(t)\}$ 满足条件:

- (1) $N(0) = 0$;
- (2) 独立增量性: $\{N(t)\}$ 是独立增量过程;
- (3) 非齐普通性: 对任何 $t \geq 0$, 当正数 $h \rightarrow 0$ 时, 有

$$\begin{cases} P(N(t+h) - N(t) = 1) = \lambda(t)h + o(h), \\ P(N(t+h) - N(t) \geq 2) = o(h), \end{cases}$$

则称 $\{N(t)\}$ 是**非时齐泊松过程**, 称 $\lambda(t)$ 是 $\{N(t)\}$ 的强度函数.

容易理解, 当强度函数 $\lambda(t)$ 变化平缓时, 在较小的时间段内可以用强度函数 $\lambda(t)$ 在这段时间的平均代替 $\lambda(t)$, 从而在小时间段中, 可视 $\{N(t)\}$ 为时齐的泊松过程. 例如对于较小的时间段 $(s, t]$ 中, 可以将汽车流视为时齐的泊松流, 这时的强度 λ 是源非时齐泊松过程的强度函数 $\lambda(t)$ 在 $(s, t]$ 上的平均:

$$\lambda = \frac{1}{t-s} \int_s^t \lambda(u) du.$$

定义

$$m(s, t] := \int_s^t \lambda(u) du.$$

其表示 $\lambda(t)$ 与时间起点 s 及终点 t 围成的图形的面积.

定理 1.2

设 $\{N(t)\}$ 是强度函数为 $\lambda(t)$ 的泊松过程, 则 $(s, t]$ 内发生的事件数 $N(s, t] = N(t) - N(s)$ 服从数学期望为 $m(s, t]$ 的泊松分布, 即

$$P(N(s, t] = k) = \frac{(m(s, t])^k}{k!} \exp(-m(s, t]), \quad k = 0, 1, \dots \quad (1.1)$$

证明.

不妨假设 $s = 0$, 其他情形类似讨论. 固定 $k \geq 0$, 采用求解微分方程的方法. 令

$$p_k(t) = P(N(t) = k).$$

从 $p_0(t)$ 开始. 显然, 由假设 (2) 和 (3) 得

$$\begin{aligned} p_0(t + \Delta t) &= p_0(t)(P(N(t, t + \Delta t] = 0)) \\ &= p_0(t)[1 - \lambda(t)\Delta t + o(\Delta t)] \\ &= p_0(t) - p_0(t)\lambda(t)\Delta t + o(\Delta t). \end{aligned}$$

令 $\Delta t \rightarrow 0$, 得

$$p_0'(t) = -\lambda(t)p_0(t).$$

证明.

求解齐次常微分, 并利用初始条件 $p_0(1) = 1$ 得

$$p_0(t) = e^{-m(t)}.$$

类似地, 由假设 (2) 和 (3) 得

$$p'_k(t) = -\lambda(t)p_k(t) + \lambda(t)p_{k-1}(t).$$

利用归纳法求解上述非齐次常微分, 得

$$p_k(t) = \frac{(m(t))^k}{k!} e^{-m(t)}.$$

定理证毕. □

设泊松过程 $\{N(t)\}$ 有强度函数 $\lambda(t)$. 对 $a > 0$, 在时刻 a 重新计数时, 得到的计数过程为

$$\tilde{N}(t) = N(t + a) - N(a), \quad t \geq 0. \quad (1.2)$$

定理 1.3

设非时齐泊松过程 $\{N(t)\}$ 有强度函数 $\lambda(t)$. 对 $a > 0$, 计数过程 (1.2) 是非时齐泊松过程, 有强度函数 $\tilde{\lambda}(t) = \lambda(t + a)$.

证明.

容易看出定义 1.1 的条件 (1) 和 (2) 成立. 下面验证 (3).

$$\begin{aligned} P(\tilde{N}(t+h) - \tilde{N}(t) = 1) &= P(N(t+h+a) - N(t+a) = 1) \\ &= \lambda(t+a)h + o(h), \\ P(\tilde{N}(t+h) - \tilde{N}(t) \geq 2) &= P(N(t+h+a) - N(t+a) \geq 2) \\ &= o(h). \end{aligned}$$



定理 1.4

设 $\{N(t)\}$ 是一个非时齐泊松过程, 具有恒正的强度函数 $\lambda(t)$. 对任意 $t \geq 0$, 令 $N^*(t) = N[m^{-1}(t)]$, 其中 $m(t) = E[N(t)]$. 则 $\{N^*(t)\}$ 是一个强度为 1 的泊松过程.

定理 1.5

令 $t > 0$, $n \geq 1$. 假设 $V_1, V_2, \dots, V_n$ 是独立同分布随机变量, 密度函数为 $\frac{\lambda(u)}{m(t)}$, $0 \leq u \leq t$, 那么

$$(S_1, \dots, S_n | N(t) = n) =_d (V_{(1)}, V_{(2)}, \dots, V_{(n)}),$$

其中 $V_{(1)}, V_{(2)}, \dots, V_{(n)}$ 是 $V_1, V_2, \dots, V_n$ 的次序统计量. 更具体地说, 在给定 $N(t) = n$ 的条件下, $S_1, \dots, S_n$ 的条件密度为

$$p(s_1, s_2, \dots, s_n | N(t) = n) = n! \prod_{i=1}^n \frac{\lambda(s_i)}{m(t)}, \quad 0 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_n \leq t.$$

例 1.6

设某设备的使用期限是 10 年，在前 5 年里它平均 2.5 年需要维修一次，后 5 年平均 2 年需维修一次. 试求它在使用期内只维修过一次的概率.

解.

用非齐次泊松过程来描述故障发生所对应的计数过程，则强度函数为

$$\lambda(t) = \begin{cases} \frac{1}{2.5}, & 0 \leq t \leq 5, \\ \frac{1}{2}, & 5 < t < 10. \end{cases}$$

于是由

$$m(10) = \int_0^{10} \lambda(t) dt = 4.5,$$

我们有

$$P(N(10) - N(0) = 1) = e^{-4.5} \frac{(4.5)^1}{1!} = \frac{9}{2} e^{-\frac{9}{2}}.$$



例 1.7

某患者具有间歇神经痛，一般情况下不需要服用药物镇痛；但有时痛得厉害，需要服用药物止痛。据观察记录，该患者 $(0, t]$ 内出现神经痛的次数 $N(t)$ 构成一个 Poisson 过程，平均次数为 λ 。另外，假设患者在 t 时刻出现的神经痛需要服用的药物的概率为 $p(t)$ （依赖于 t ）。令 $t > 0$ ， $\tilde{N}(t)$ 表示 $(0, t]$ 内服用的药物的次数，求 $\tilde{N}(t)$ 的分布。

解.

假设 $N(t) = n$, 并且出现神经痛的时刻为 $S_1, S_2, \dots, S_n$. 由于是否服药相互独立, 所以在此条件下我们有 $\tilde{N}(t) = k$ (其中 $k \leq n$) 的概率为

$$f(S_1, S_2, \dots, S_n) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \prod_{i=1}^k p(S_{i_1}) \prod_{j \neq i_1, \dots, i_k} [1 - p(S_j)].$$

因此, 利用全概率公式得

$$\begin{aligned} P(\tilde{N}(t) = k) &= \sum_{n=k}^{\infty} P(\tilde{N}(t) = k | N(t) = n) P(N(t) = n) \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} E(f(S_1, S_2, \dots, S_n) | N(t) = n) P(N(t) = n). \end{aligned}$$

解.

注意到函数 f 关于 n 个变量对称, 所以我们有

$$\begin{aligned} E(f(S_1, \dots, S_n) | N(t) = n) &= Ef(U_{(1)}, U_{(2)}, \dots, U_{(n)}) \\ &= Ef(U_1, U_2, \dots, U_n), \end{aligned}$$

其中 $U_1, U_2, \dots, U_n$ 为独立同分布均匀随机变量. 不难计算

$$Ef(U_1, U_2, \dots, U_n) = \binom{n}{k} \frac{1}{t^n} \left[\int_0^t p(u) du \right]^k \left[t - \int_0^t p(u) du \right]^{n-k}.$$

于是

$$\begin{aligned} P(\tilde{N}(t) = k) &= \sum_{n=k}^{\infty} Ef(U_1, \dots, U_n) P(N(t) = n) \\ &= \frac{(\lambda \int_0^t p(u) du)^k}{k!} e^{-\lambda \int_0^t p(u) du}. \end{aligned}$$



1 非时齐泊松过程

2 非时齐泊松过程的参数估计

3 习题讲解

假设强度函数 $\lambda(t)$ 有周期 d , 要估计强度函数在 t_0 的值时, 我们可以取一个适当的小区间 $(s, t] = (t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, 由中值定理我们有

$$\lambda(t_0) \approx \lambda_0 \equiv \frac{1}{2\delta} \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} \lambda(u) du = \frac{m(s, t]}{2\delta}.$$

这时

$$N(s + jd - d, t + jd - d], \quad j = 1, 2, \dots, n$$

相互独立, 有共同的概率分布 (1.1). 得到观测值

$$k_j = N(s + jd - d, t + jd - d], \quad j = 1, 2, \dots, n$$

后, λ_0 的似然函数是

$$L(\lambda_0) = \prod_{j=1}^n \left(\frac{(2\delta\lambda_0)^{k_j}}{k_j!} \exp(-2\delta\lambda_0) \right),$$

其中 $2\delta = t - s$.

对数似然函数是

$$l(\lambda_0) = \sum_{j=1}^n k_j \ln \lambda_0 - n(t-s)\lambda_0 + c_0, \quad c_0 = \text{常数}.$$

由 $l'(\lambda_0) = 0$, 我们得到 λ_0 的最大似然估计

$$\hat{\lambda}_0 = \frac{1}{n(t-s)} \sum_{j=1}^n k_j.$$

不难看出 $E[\hat{\lambda}_0] = \lambda_0$, 所以 $\hat{\lambda}_0$ 是 λ_0 的无偏估计. 利用强大数律我们有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\lambda}_0 = \frac{E[N(s, t)]}{2\delta} = \lambda_0 \text{ a.s.},$$

所以 $\hat{\lambda}_0$ 是 λ_0 的强相合估计.

因为

$$\text{Var}(\hat{\lambda}_0) = \frac{1}{n(2\delta)^2} \text{Var}(N(s, t]) = \frac{\lambda_0}{2n\delta},$$

利用中心极限定理, 我们知对于充分大的 n , 有

$$\frac{\hat{\lambda}_0 - \lambda_0}{\sqrt{\lambda_0/(2n\delta)}} \sim N(0, 1)$$

近似成立.

由

$$\frac{\hat{\lambda}_0 - \lambda}{\sqrt{\lambda_0/(2n\delta)}} \leq z_{\alpha/2}$$

等价于 $g(\lambda_0) = a\lambda_0^2 - b\lambda_0 + c \leq 0$, 其中

$$a = 1, \quad b = 2\hat{\lambda}_0 + \frac{z_{\alpha/2}^2}{2n\delta}, \quad c = \hat{\lambda}_0^2,$$

我们知在置信水平 $1 - \alpha$ 下, λ_0 (或 $\lambda(t_0)$) 的近似置信区间是

$$\left[\frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right].$$

例 2.1

一位交通局的退休干部每天记录 10:00 至 10:10 之间路过他家楼下由东向西的出租车数量, 得到了下面的数据:

13	9	19	16	15	20	20	17	16	20
20	8	15	23	25	15	18	19	15	22
12	17	19	15	14	16	18	17	22	10

以分钟为时间单位, 估计 10:00 到 10:10 之间这段路上出租车流的平均强度 λ_0 . 计算 λ_0 的置信水平为 0.95 的置信区间.

解.

用 k_j 表示第 j 次观测到的出租车数, $n = 30$, $2\delta = 10$. 于是我们可以得到 λ_0 的最大似然估计

$$\hat{\lambda}_0 = \frac{1}{30 \times 10} \sum_{j=1}^n k_j = 1.683 (\text{辆/分钟}).$$

对 $1 - \alpha = 0.95$, 查表得 $z_{\alpha/2} = 1.96$. 于是我们可以求得

$$a = 1, \quad 2\delta = 10, \quad n = 30,$$

$$b = 2\hat{\lambda}_0 + 1.96^2/300 = 3.3788,$$

$$c = \hat{\lambda}_0^2 = 2.8325.$$

于是在置信水平 0.95 下, λ_0 的置信区间是

$$[1.5425, 1.8363].$$



1 非时齐泊松过程

2 非时齐泊松过程的参数估计

3 习题讲解

例 3.1

设随机过程 $X(t) = X + Yt + Zt^2$, 其中 X , Y 和 Z 是相互独立的随机变量, 且具有均值 0 和方差 1, 求随机过程 $X(t)$ 的协方差函数.

解.

我们有 $EX(t) = E[X + Yt + Zt^2] = E[X] + tE[Y] + t^2E[Z] = 0$. 于是随机过程 $X(t)$ 的协方差函数为

$$\begin{aligned}\gamma(t_1, t_2) &= E[X(t_1)X(t_2)] = [E(X + Yt_1 + Zt_1^2)(X + Yt_2 + Zt_2^2)] \\ &= E[X^2] + t_1t_2E[Y^2] + t_1^2t_2^2E[Z^2] = 1 + t_1t_2 + t_1^2t_2^2.\end{aligned}$$



例 3.2

某宠物商店每个月初订购一次猫粮 (单位: 千克), 以满足该月的销售需求. 假设每月的需求服从参数为 λ 的指数分布. 如果商店猫粮的进价为 c 元每千克, 售价为 $s(s > c)$ 元每千克. 假定月底剩下的存货因为过期毫无价值, 而且商店不会因为进货量不足而受到额外损失. 那么该商店因订购多少猫粮使得期望利润最大? 如果存货能以每千克 $r(r < \min(s, c))$ 元的价格退回, 那么最佳订购量又是多少?

解.

令 X 为需求量. 假设猫粮的订购量为 t , 那么利润 P 为

$$P = s \min(X, t) - ct.$$

注意到 $\min(X, t) = X - (X - t)^+$, 以及由指数分布的无记忆性, 我们有

$$\begin{aligned} E[(X - t)^+] &= E[(X - t)^+ | X > t]P(X > t) \\ &\quad + E[(X - t)^+ | X \leq t]P(X \leq t) \\ &= E[(X - t)^+ | X > t]e^{-\lambda t} \\ &= \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

解.

所以

$$E[\min(X, t)] = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}.$$

于是

$$E[P] = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t} - ct.$$

微分后可得当 $se^{-\lambda t} - c = 0$, 即 $t = \frac{1}{\lambda} \ln(s/c)$ 时利润最大.

解.

如果存货能以每千克 r ($r < \min(s, c)$) 元的价格退回, 和前面讨论类似, 我们可以得到 $E[P]$ 的表达式

$$\begin{aligned} E[P] &= sE[\min(X, t)] - ct + rE[(t - X)^+] \\ &= sE[\min(X, t)] - ct + r(t - E[\min(X, t)]) \\ &= \frac{s - r}{\lambda} + \frac{r - s}{\lambda} e^{-\lambda t} - (c - r)t. \end{aligned}$$

微分后可求得最佳订购量是

$$t = \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{s - r}{c - r}\right).$$



例 3.3

设 $\{N(t)\}$ 是强度为 λ 的泊松过程, $0 \leq s < t$. 验证在条件 $N(t) = n$ 下, $N(s)$ 服从二项分布 $B(n, s/t)$.

证明.

当 $0 \leq s < t$ 时, 有

$$\begin{aligned} P(N(s) = k | N(t) = n) &= \frac{P(N(s) = k, N(t) = n)}{P(N(t) = n)} \\ &= \frac{P(N(s) = k, N(t) - N(s) = n - k)}{P(N(t) = n)} \\ &= \frac{\frac{(\lambda s)^k}{k!} e^{-\lambda s} \frac{(\lambda(t-s))^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\lambda(t-s)}}{\frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{s^k (t-s)^{n-k}}{t^n} \\ &= C_n^k \left(\frac{s}{t}\right)^k \left(\frac{t-s}{t}\right)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n. \end{aligned}$$



例 3.4

对于泊松过程 $\{N(t)\}$, 计算

$$E[N(t)N(t+s)], \quad E[N(t+s)|N(t)],$$

其中 $s > 0$.

解.

对 $s > 0$, 由独立增量性我们有

$$\begin{aligned} E[N(t)N(t+s)] &= E[N(t)(N(t+s) - N(t) + N(t))] \\ &= E[N(t)(N(t+s) - N(t))] + E[N(t)^2] \\ &= E[N(t)]E[N(t+s) - N(t)] + E[N(t)^2] \\ &= \lambda t \lambda s + \lambda t + (\lambda t)^2 \\ &= (\lambda t)^2 + \lambda t(\lambda s + 1). \end{aligned}$$

解.

以及

$$\begin{aligned} E[N(t+s)|N(t)] &= E[N(t+s) - N(t) + N(t)|N(t)] \\ &= E[N(t+s) - N(t)|N(t)] + N(t) \\ &= \lambda s + N(t). \end{aligned}$$

