第 8 讲 更新过程

在前面的课程中我们知道，当计数过程 $\{N(t)\}$ 的等待间隔 $X_1, X_2, \cdots$ 是来自指数总体 $\mathcal{E}(\lambda)$ 的随机变量时，$\{N(t)\}$ 时泊松过程.

在实际问题中，还有很多计数过程，其等待间隔是独立同分布的随机变量，但并不服从指数分布，人们称这样的过程为更新过程，称等待间隔 $X_1, X_2, \cdots$ 为更新间隔.

设 X 是非负随机变量，如无特别说明一般我们要求 $P(X<\infty)=1$，即间隔时间有限，但有时一些结论也可推广到间隔时间可能无限的情形. 来自总体 X 的随机变量 $X_1, X_2, \cdots$ 是更新过程 $\{N(t)\}$ 的第 $1, 2, \cdots$ 个更新间隔. 定义

$$S_0=0,\ S_n=X_1+\cdots+X_n,\ n\geq 1.$$

S_n 是第 n 个更新发生的时刻.

根据计数过程和到达时间的关系，我们有

$$\{N(t) < n\} = \{S_n > t\},\ \{N(t) = n\} = \{S_n \le t < S_{n+1}\}.$$

注意

$$N(t) = \#\{n | S_n \le t, n \ge 1\} = \sum_{n=1}^{\infty} I[S_n \le t],\ t \in [0, \infty),$$

其中 $\#A$ 表示集合 A 中的元素个数，$I[A]$ 是 A 的示性函数.

以下总约定更新间隔 $X_1, X_2, \cdots$ 是来自总体 X 的随机变量，

$$F(x) = P(X \leq x),\ \ \mu = E[X] > 0$$

分别是总体 X 的分布函数和数学期望. 在讨论更新过程时，如无特别说明，所提到的随机变量都是非负的.

由于 $N(t)$ 是 $[0,t]$ 中的更新次数，所以对于充分大的 t，$t/N(t)$ 近似等于 $[0,t]$ 中的平均等待间隔 μ. 当 $t \to \infty$ 时，直观上应该有 $t/N(t) \to \mu$，从而得到

$$\frac{N(t)}{t} \to \frac{1}{\mu} \quad a.s.. \tag{2.1}$$

为了数学上证明 (2.1)，先做一些必要的准备.

由强大数律，当 $n \to \infty$ 时，

$$\frac{S_n}{n} \to \mu \quad a.s.,$$

所以有

$$S_n \to \infty \quad a.s..$$

更新过程 $N(t)$ 是计数过程，所以是 t 的单调不减函数. 当 $t \to \infty$ 时，$N(t)$ 的极限等于它的子序列 $N(S_n)$ 的极限，于是

$$\lim_{t\to\infty} N(t) = \lim_{n\to\infty} N(S_n) \geq \lim_{n\to\infty} n = \infty \ a.s..$$

上式说明更新次数随着时间的延长而无限的增加. 以后把上式记成 $N(\infty) = \infty$ a.s..

注意到 $S_{N(t)}$ 是 $[0,t]$ 内的最后一次更新时刻，$S_{N(t)+1}$ 是 (t,∞) 中的第一个更新时刻，所以有

$$S_{N(t)} \leq t < S_{N(t)+1}.$$

于是得到

$$\frac{S_{N(t)}}{N(t)} \leq \frac{t}{N(t)} < \frac{S_{N(t)+1}}{N(t)}.$$

令 $t \to \infty$，我们有

$$\lim_{t\to\infty} \frac{S_{N(t)+1}}{N(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{S_{N(t)}}{N(t)} = \lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \mu \ a.s.,$$

于是 (2.1) 成立.

定理 2.1

设更新间隔 $X_1, X_2, \cdots$ 有数学期望 $\mu > 0$，则当 $t \to \infty$ 时，$N(t)/t \to 1/\mu$ a.s..

上面结果表明依概率 1，$N(t)$ 和 t/μ 是同阶无穷大，或者说在几乎必然的意义下，$N(t)$ 的发散速度是 t/μ. 数 $1/\mu$ 称为 更新过程的速率.

注记 2.2

如果 $\mu=\infty$，类似的推导可知上面结论也成立. 此时我们可以采用采用截断的方法：对固定的 $c>0$，记 $X_n^c=\min\{X_n,c\}$，$n=1,2,\cdots$. 注意到 $\mu^c=E[X_n^c]\leq c<\infty$，且由单调收敛定理知当 $c\to\infty$ 时，$\mu^c\uparrow\infty$. 设 $\epsilon>0$, 取 $c>0$ 充分大使得 $1/\mu^c<\epsilon$. 注意到

$$X_n^c\leq X_n,\ n=1,2,\cdots.$$

于是 $S_n^c=\sum_{i=1}^b X_i^c\leq S_n$, $n=0,1,2,\cdots$ 进而 $N^c(t)=\max\{n:S_n^c\leq t\}\geq N(t)$, $t>0$. 于是对任意 $t>0$，有

$$0\leq\frac{N(t)}{t}\leq\frac{N^c(t)}{t}.$$

由定理 2.1，我们知存在几乎必然地，存在 t 充分大，使得

$$\frac{N(t)}{t}\leq\frac{N^c(t)}{t}\leq\frac{1}{\mu^c}+\epsilon<2\epsilon\ a.s..$$

由 ϵ 的任意性我们知结论成立.

定理 2.3

定义 $\lambda_t = t/\mu$，$\sigma_t = \sigma\sqrt{t/\mu^3}$. 如果 $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) \in (0, \infty)$，则对任何实数 x，

$$\lim_{t\to\infty} P(\frac{N(t) - \lambda_t}{\sigma_t} \le x) = \Phi(x),$$

其中 $\Phi(x)$ 是 $N(0,1)$ 的分布函数.

证明.

记 $r_t = \lambda_t + x\sigma_t$, $n := n(t) = [r_t] + 1$，有

$$P(\frac{N(t)-\lambda_t}{\sigma_t} \le x) = P(N(t) \le r_t) = P(N(t) < n) = P(S_n > t)$$
$$= P(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} > \frac{t - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}).$$

由中心极限定理我们知只需再证明

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t-n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = -x.$$

证明.

实际上，当 $t \to \infty$ 时，有

$$r_t \to \infty,\ |r_t - n| \le 1,\ \sigma_t/\lambda_t \to 0,\ \mu\sigma_t = \mu\sigma\sqrt{t/\mu^3} = \sigma\sqrt{\lambda_t},$$

于是

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} \frac{t - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} &= \lim_{t\to\infty} \frac{t - r_t\mu - (n - r_t)\mu}{\sigma\sqrt{n/r_t}\sqrt{r_t}} \\ &= \lim_{t\to\infty} \frac{t - r_t\mu}{\sigma\sqrt{r_t}} = \lim_{t\to\infty} \frac{-x\mu\sigma_t}{\sigma\sqrt{\lambda_t}} = -x.\end{aligned}$$

从而得证. □

推论 2.4

对于较大的 t，在置信水平 0.95 下，$N(t)$ 的近似置信区间是

$$\left[\frac{t}{\mu} - 1.96\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu^3}}, \frac{t}{\mu} + 1.96\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu^3}}\right].$$

思考题

例 2.5

一个容器内含有无限多硬币. 每个硬币有各自出现正面的概率, 而这些概率是独立的 $(0,1)$ 均匀分布的随机变量的值. 假设我们按顺序投掷硬币, 在任意时间或者掷一枚新的硬币, 或者掷一个已经用过的硬币. 如果我们的目标是掷出正面的长程比例最大, 问应该如何进行?

证明.

我们要展示一个策略，其结果使在长程中掷出正面的比例等于 1. 作为开始，以 $N(n)$ 记在前 n 次投掷中掷出反面的次数，所以正面的长程比例，记为 P_h，有

$$P_h = \lim_{n\to\infty} \frac{n - N(n)}{n} = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{N(n)}{n}.$$

考虑如下策略：开始时选取一个硬币，连续地投掷它直至出现反面为止. 此时将此硬币抛弃 (不再用它) 并选取一个新的硬币. 这种过程就如此重复. 为了计算对于这个策略 P_h，注意，一个投掷的硬币出现反面更成了更新事件，因此由定理 2.1，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N(n)}{n} = 1/E[\text{在相继的反面之间的投掷数}].$$

在给定投掷出正面的概率为 p 时，直至出现反面的投掷数是具有均值 $1/(1-p)$ 的几何随机变量. 因此，条件给出了

$$E[\text{在相继的反面之间的投掷数}] = \int_0^1 \frac{1}{1-p} dp = \infty,$$

上式蕴含了以概率 1 地有 $\lim_{n\to\infty} \frac{N(n)}{n} = 0$. □

对于更新过程 $\{N(t)\}$，在应用中我们自然关心数学期望 $E[N(t)]$，例如可以备足部件随时更新. 称 $[0,t]$ 中的平均更新次数

$$m(t) = E[N(t)],\ t \geq 0$$

为更新过程 $N(t)$ 的更新函数.

设更新间隔 $X_1, X_2, \cdots$ 的分布函数是 $F(t)=P(X_i \le t)$，到达时刻 C_n 的分布函数是

$$F_n(t)=P(S_n \le t).$$

对于 $n, m \ge t$，利用 S_n 和 $S_{n+m}-S_n$ 独立得到

$$\begin{aligned} F_{n+m}(t) &= P(S_n+(S_{n+m}-S_n)\le t) \\ &\le P(S_n \le t, S_{n+m}-S_n \le t)=F_n(t)F_m(t). \end{aligned}$$

这就得到对于任何 $m, k \ge 1$，

$$F_{mk}(t) \le F_m(t)F_{m(k-1)}(t) \le \cdots \le [F_m(t)]^k,\ t \ge 0.$$

利用单调收敛定理我们有

$$m(t)=E[\sum_{n=1}^{\infty} I[S_n \le t]]=\sum_{n=1}^{\infty} E[I[S_n \le t]]=\sum_{n=1}^{\infty} F_n(t),\ t \ge 0.$$

注意到 $F_n(t) \le F^n(t)$，我们有

$$m(t) \le F(t)\sum_{n=1}^{\infty}[F(t)]^{n-1} = \frac{F(t)}{1-F(t)},\ t \ge 0.$$

于是如果更新间隔 X_i 是无界随机变量，即对所有的 $t<\infty$，$F(t)=P(X_i \le t)<1$，则 $m(t)<\infty$ 总成立. 同时注意到 $S_n \to \infty$ a.s.，所以我们有

引理 3.1

对于确定的 t，总有 m 使得 $F_m(t)=P(S_m \le t)<1$.

证明.

因为 $E[X] = \mu > 0$，所以存在 $\epsilon > 0$ 使得 $P(X > \epsilon) > 0$. 于是对任意 n 有

$$P(S_n \le n\epsilon) = 1 - P(S_n > n\epsilon) \le 1 - P(X_1 > \epsilon)^n < 1.$$

于是对于确定的 t，取 m 充分大使得 $t \le m\epsilon$，从而
$F_m(t) = P(S_m \le t) \le P(S_m \le m\epsilon) < 1.$ □

设 m 由如上引理给出，对任何正整数 n，存在整数 k,r 使得 $n=km+r$，$1\le r\le m$. 所以

$$F_{km+r}(t)\le F_{km}(t)F_r(t)\le [F_m(t)]^k F_r(t).$$

于是得到

$$\begin{aligned} m(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{r=1}^{m} F_{mk+r}(t) \\ &\le \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{r=1}^{m}[F_m(t)]^k F_r(t) \\ &= \frac{1}{1-F_m(t)}\sum_{r=1}^{m} F_r(t) < \infty. \end{aligned}$$

于是我们有

定理 3.2

对于 $t\ge 0$，$m(t)<\infty$.

注记 3.3

我们还可以用另外一种方法证明上面定理. 由马尔可夫不等式，我们有

$$P(S_n \le t) = P(e^{-S_n} \ge e^{-t}) \le e^t E[e^{-S_n}].$$

由于 $X_1, \cdots, X_n$ 时独立同分布的，所以

$$E[e^{-S_n}] = E[e^{-\sum_{k=1}^n X_k}] = \prod_{k=1}^n E[e^{-X_k}] = \alpha^n,$$

其中 $\alpha = E[e^{-X_i}] < 1$ (因为 $\mu = E[X_i] > 0$，所以 $P(X_i = 0) < 1$). 从而

$$m(t) = \sum_{n=1}^\infty F_n(t) = \sum_{n=1}^\infty P(S_n \le t) \le e^t \sum_{n=1}^\infty \alpha^n < \infty.$$

下面我们来看更新函数的更多性质.

定理 3.4

$m(t)=\sum_{n=1}^{\infty}F_n(t)$ 是单调不减的右连续函数.

证明.

首先，由 $m(t)=\sum_{n=1}^{\infty}F_n(t)$ 以及 $F_n(t)$ 单调不减我们知 $m(t)$ 也单调不减. 对任意 $t\geq 0$，$\epsilon>0$，由 $m(t)<\infty$ 我们知存在 M 使得

$$\sum_{n=M}^{\infty}F_n(t+1)\leq\epsilon.$$

分布函数 F_n 右连续，所以当 $n\to\infty$ 时，

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}m(t+1/n)&\leq\lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{M}F_n(t+1/n)+\epsilon\\&=\sum_{n=1}^{M}F_n(t)+\epsilon\leq m(t)+\epsilon.\end{aligned}$$

由 ϵ 的任意性以及 $m(t)\leq m(t+1/n)$ (因为) 我们知 $m(t+1/n)\to m(t)$. $\square$

定理 3.5

当 $t \to \infty$ 时，$m(t) \to \infty$.

证明.

对于任意大的实数 M，由 $\lim_{t\to\infty} F_n(t) = 1$ 以及

$$\lim_{t\to\infty} m(t) \geq \lim_{t\to\infty} \sum_{n=1}^{M} F_n(t) = M$$

即有结论成立. □

定理 3.6

$$m(0) = F(0)/[1 - F(0)].$$

证明.

由于更新间隔是非负的随机变量，所以

$$\begin{aligned} F_n(0) &= P(S_n = 0) = P(X_1 = 0, X_2 = 0, \cdots, X_n = 0) \\ &= P(X = 0)^n = [F(0)]^n. \end{aligned}$$

从而

$$m(0) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(0) = \sum_{n=1}^{\infty} [F(0)]^n = \frac{F(0)}{1 - F(0)}. \qquad \square$$

类似于把泊松过程称为泊松流，在实际问题中，人们也称更新过程 $\{N(t)\}$ 的更新时刻

$$S_0 = 0,\ S_j = X_1 + X_2 + \cdots + X_j,\ j = 1, 2, \cdots$$

为更新流. 称事件按更新流 $\{S_j\}$ 发生，意指事件按更新过程 $\{N(t)\}$ 发生.

命题 4.1

用 $\{X_j\}$ 表示更新过程 $\{N(t)\}$ 的更新间隔. 如果 $\{N(t)\}$ 具有独立增量性和平稳增量性，且 $P(X_1=0)=0$，则 $\{N(t)\}$ 是泊松过程.

证明.

只要证明 X_1 服从指数分布. 对于 $s,t>0$，由

$$\begin{aligned}
P(X_1>s+t|X_1>s) &= P(N(s+t)=0|N(s)=0) \\
&= P(N(s+t)-N(s)=0|N(s)=0) \\
&= P(N(s,s+t]=0)=P(N(t)=0) \\
&= P(X_1>t)
\end{aligned}$$

我们知 X_1 具有无记忆性，所以服从指数分布. □

例 4.2

单行道上汽车按更新流 $\{S_j\}$ 驶过，单位是秒. 如果行人横穿该公路需要 a 秒钟，计算在 $t=0$ 时到达的行人平均等待多少时间才能横穿公路.

解.

用 Y 表示该行人的等待时间. 已知 $S_1 = s > a$ 时, $E[Y] = 0$. 已知 $S_1 = s \le a$ 时, $E[Y] = 0$. 已知 $S_1 = s \le a$ 时, 第一辆车在 $S_1 = s$ 时刻驶过后, 他白等了 s 秒, 需要在 s 时重新开始等候. 这说明对 $s \le a$, $Y|X_1 = s$ 和 $s + Y$ 同分布. 从上面的分析得到

$$Y|S_1 = s \text{ 和} W = \begin{cases} 0, & s > a, \\ s + Y, & s \le a \end{cases} \quad \text{同分布.}$$

证明.

设 $F(x)$ 是 S_1 的分布函数，利用全概率公式我们有

$$\begin{aligned}
E[Y] &= \int_0^\infty E[Y|S_1 = s]dF(s) \\
&= \int_0^a E[Y|S_1 = s]dF(s) + \int_{a+}^\infty E[Y|S_1 = s]dF(s) \\
&= \int_0^a E(s+Y)dF(s) + 0 \\
&= \int_0^a sdF(s) + F(a)E[Y],
\end{aligned}$$

其中 $\int_{a+}^\infty$ 表示 (a,∞) 上的积分. 于是我们得到平均等候时间

$$E[Y] = \frac{1}{\overline{F}(a)} \int_0^a sdF(s) \text{ 秒.}$$

□