第 4 次作业

截止日期：3 月 24 日

习题 1. P55 练习 2.4 (3).

解. (1) 由全概率公式我们有

$$\begin{aligned}P(N(T)=n)=&\int_0^{+\infty}P(N(t)=n|T=t)f_T(t)dt\\=&\int_0^{+\infty}P(N(t)=n)\beta e^{-\beta t}dt\\=&\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}\beta e^{-\beta t}dt\\=&\frac{\beta}{n!}\int_0^{+\infty}e^{-(\lambda+\beta)t}(\lambda t)^n dt.\\=&\frac{\lambda^n\beta}{(\lambda+\beta)^{k+1}}.\end{aligned}$$

(2) $E[N(t)]=\sum_{n=0}^{+\infty}nP(N(T)=n)=\frac{\beta}{\lambda+\beta}\sum_{n=0}^{+\infty}n(\frac{\lambda}{\lambda+\beta})^n=\lambda/\beta.$ □

习题 2. P69 习题 2.16.

解. 用 $N(t)$ 表示 $[0,t]$ 内进入高速路的车数. 已知 $N(t)=n$ 时，这 n 辆车每一辆的进入时间 S 在 $[0,t]$ 中均匀分布. 每一辆车在 t 时位于 $[a,b]$ 的概率为

$$\begin{aligned}p=P(a\le(t-s)V\le b)=&\frac{1}{t}\int_0^t P(P(a\le(t-s)V\le b)ds\\=&\frac{1}{t}\int_0^t[G(b/(t-s))-G(a/(t-s))]ds.\end{aligned}$$

用 $Y_j=1,0$ 分别表示第 j 辆车位于或没位于 $[a,b]$，$\{Y_j\}$ 与 $\{N(t)\}$ 独立. t 时位于 $[a,b]$ 的车数 $M=\sum_{j=1}^{N(t)}Y_j\sim\mathcal{P}(\lambda tp)$. □

习题 3. P69 习题 2.18.

解. 假设加班车的发车时间为 t，第 i 个乘客的到达车站时间为 S_i，所有乘客的候车时间为 $w(t)$，则平均候车时间为：

$$
\begin{aligned}
E[w(t)] &= E[\sum_{i=1}^{N(t)}(t-S_i)+\sum_{i=N(t)+1}^{N(5)}(5-S_i)] \\
&= E[E[\sum_{i=1}^{N(t)}(t-S_i)+\sum_{i=N(t)+1}^{N(5)}(5-S_i)|N(t)]].
\end{aligned}
$$

当 $N(t)=n$ 时，

$$
\sum_{i=1}^{N(t)}(t-S_i)+\sum_{i=N(t)+1}^{N(5)}(5-S_i)=\sum_{i=1}^{n}(t-S_i)+\sum_{n+1}^{N(5)}(5-S_i).
$$

所以

$$
E[\sum_{i=1}^{N(t)}(t-S_i)+\sum_{i=N(t)+1}^{N(5)}(5-S_i)|N(t)]=tN(t)+5(N(5)-N(t))-N(5)E[S_i],
$$

进而

$$
E[w(t)]=tE[N(t)]+5(N(5)-E[N(t)])-N(5)E[S_i]=\lambda t^2+5\lambda(5-t)-5\lambda\frac{5}{2}=\lambda t^2-5\lambda t+12.5\lambda.
$$

当 $t=2.5$ 时，$E[w(t)]$ 取得最小值，即在原来每辆公交车发车后 2.5 分钟加发一辆车，可以使得旅客的平均候车时间最短.k □

习题 4. 选做 假设关于您想出售的物品的非负出价以速率为 λ 的 Poisson 过程到达. 假定每次出价值是一个随机变量，其具有密度函数 $f(x)$. 一旦收到出价，您必须即时决定接受出价或拒绝并等待下一个出价. 假设部件卖出以前，你需要承担平均每单位时间 c 的成本. 而您的目标是使期望的总收入最大，其中总收入等于物品出售的价格减去总成本. 假设您使用的策略是，接受第一个超过某个特定值 y 的出价. 问 y 的最优值是多少？