第 6 次作业

截止日期：4 月 7 日

习题 1. 课本 P88 练习 3.2(2).

解. 认为他每次走出溶洞完成一次更新然后又走回溶洞，以此往复构成一个更新过程. 引入

$$X_i = \begin{cases} 2, & \text{第 } i \text{ 次走出溶洞}, \\ 1, & \text{第 } i \text{ 次走回}. \end{cases}$$

$N = \inf\{i|X_i = 2\}$ 是 $\{X_i\}$ 的停时，第一个更新间隔是 $T = \sum_{j=1}^{N} X_j$. 于是由瓦尔德定理 $E[T] = E[N]E[X_i] = 2 \times 1.5 = 3$. □

习题 2. 课本 P89 练习 3.2(4).

证明. 由于原过程是更新过程，每个事件被漏记所对应的事件相互独立，也与更新过程独立，同时由下面计算知每次记录的时间间隔服从相同的分布，所以新过程也为更新过程。以 X 表示新的更新过程的时间间隔，则以 N 表示两次更新中漏记的事件数，由全概率公式我们有：

$$\begin{aligned} P(X \le t) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(X \le t | N = n) P(N = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} F_{n+1}(t)(1-p)p^n \\ &= (1-p)\sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) p^{n-1}. \end{aligned}$$ □

习题 3. P132 习题 3.4.

证明. 新的计数过程的时间间隔为 $Y_i = X_i T_i$. 注意到 $\{T_i\}$ 相互独立，$\{X_i\}$ 也相互独立，且 $\{T_i\}$ 与 $\{X_i\}$ 独立，故 $\{X_i T_i\}$ 也相互独立。下面我们证明 Y_i 具有相同的分布，从而得到的过程为更新过程.

我们有

$$\begin{aligned}P(T_iX_i \le x) &= \sum_{k=0}^{n} P(T_iX_i \le x|T_i = k)P(T_i = k)\\ &= \sum_{k=1}^{n} P(kX_i \le x)\binom{n}{k}p^k q^{n-k} + q^n\\ &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}p^k q^{n-k}F(x/k) + q^n.\end{aligned}$$

从而我们知得到的过程为更新过程，且更新间隔的分布函数如上. □

习题 4. (选做) 设更新过程 $(N(t) : t \ge 0)$ 的更新间隔时间序列 $\{X_n\}$ 取正整数值. 记 $A_n = \{$在时刻 n 发生更新$\}$. 证明：如果极限 $a := \lim_{n\to\infty} P(A_n)$ 存在，则有 $a = 1/E(X_1)$.

证明. 注意到时刻 n 为止的更新次数为 $N(n) = \sum_{k=1}^{n} 1_{A_k}$. 因此，

$$m(n) = E[N(n)] = \sum_{k=1}^{n} P(A_k).$$

由于极限 $a := \lim_{n\to\infty} P(A_n)$ 存在，我们知 $m(n)/a \to a$. 由基本更新定理 $m(n)/n \to 1/E(\xi_1)$，所以 $a = 1/E(\xi_1)$. □