第 7 次作业

截止日期：4 月 14 日

习题 1. 课本 P96 练习 3.3 (2)

证明. 设 $G(x) = P(X_1 \le x)$，$F(x) = P(X \le x)$. 用 $m_D(t) = E[N_D(t)]$ 表示延迟更新过程的更新函数，用 F_0 表示常数 0 的分布函数，则有

$$\begin{aligned}
m_D(t) &= \sum_{j=1}^{\infty} E[I[S_j \le t]] \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} P(X_1 + (S_j - X_1) \le t) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} G * F_{j-1}(t) \\
&= G(t) + \sum_{j=1}^{\infty} G * F_j(t) \\
&= G(t) + (\sum_{j=1}^{\infty} G * F_{j-1}) * F(t) \\
&= G(t) + \int_0^t m_D(t-s) dF(s).
\end{aligned}$$

□

习题 2. 课本 P105 练习 3.4 (3)

提示. 将该过程视为一个多个状态的系统，可得第 i 道装修工序的房屋在所有装修房屋中的比例为 $\mu_i/(\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n)$. □

习题 3. 设 $\{N(t) : t \ge 0\}$ 是一个更新过程，已知其更新函数 $m(t) = E[N(t)]$. 求 $g(t) := E[N(t)^2]$.

解. 令 S_1 是第一次更新的时间，则

$$g(t) = E[E[N(t)^2 | S_1]] = \int_0^t E[N(t)^2 | S_1 = x] dF(x).$$

注意到

$$\begin{aligned} E[N(t)^2|S_1=x] &= E[(N(x,t]+N(x))^2|S_1=x) \\ &= E[(N(x,t]+1)^2|S_1=x] \\ &= E[(N(t-x)+1)^2], \end{aligned}$$

我们有

$$g(t)=F(t)+2\int_0^t m(t-x)dF(x)+\int_0^t g(t-x)dF(x).$$

又注意到

$$\int_0^t m(t-x)dF(x)=m*F(t)=m(t)-F(t),$$

于是我们知 g 是如下更新方程的解：

$$g(t)=2m(t)-F(t)+\int_0^t g(t-x)dF(x).$$

于是我们有

$$\begin{aligned} g(t) &= 2m(t)-F(t)+[2m-F]*m(t) \\ &= m(t)+2m*m(t). \end{aligned}$$

□

习题 4. 某保险公司对某种保险有两档收费率，分别为每单位时间 r_1 (称为一档保费) 和 r_0 (称为二档保费) . 设参保人一开始缴纳一档保费. 如果他缴纳一档保费之后，在连续 s 个单位时间内没有发生理赔，那么他会将保费切换到二档保费；一旦发生理赔，参保人会维持或切换到一档保费. 设理赔的发生构成一个参数 λ 的 Poisson 过程. 假设参保人的参保时间充分的长，求他单位时间所付的平均保费.

解. 如果当参保人按收费率 r_1 付费时，我们说系统处在开状态，否则称系统处于关状态，于是我们得到一个开关系统. 记 X 是是相继理赔间的时间间隔，U 是开状态时间，则 $U=\min(X,s)$. 于是

$$E[U]=E[\min(X,s)]=\int_0^s x\lambda e^{-\lambda x}dx+se^{-\lambda s}=\frac{1}{\lambda}(1-e^{-\lambda s}).$$

于是我们可得参保人以收费率 r_i 付费的时间比例 $(i=1,2)$：

$$P_1=E[U]/E[X]=1-e^{-\lambda s},\ P_0=1-P_1=e^{-\lambda s}.$$

于是单位时间所付的平均保费为

$$r_0P_0+r_1P_1=r_1-(r_1-r_0)e^{-\lambda s}.$$

□