第 10 讲 关键更新定理和更新方程

卷积及其性质
更新方程
分支过程
习题讲解

为了方便地得到更新方程的性质，先介绍一点卷积的基本性质. 我们规定用 $\int_a^b$ 表示在闭区间 $[a,b]$ 上的积分.

本节中所讨论的函数当自变量在 $(-\infty,0)$ 中变化时，取值都是 0.

定义 1.1

设非负随机变量 X, Y 独立, 分别有分布函数 $F(x), G(x)$, 则 $U = X+Y$ 有分布函数

$$\begin{aligned} F * G(t) &= P(X + Y \le t) \\ &= \int_0^t P(X + Y \le t | Y = s) dG(s) \\ &= \int F(t - s) dG(s). \end{aligned}$$

称 $F * G(t)$ 为 F 与 G 的卷积.

由于 $X+Y=Y+X$，所以有

$$F*G(t)=G*F(t).$$

再设 $Z\geq 0$，有分布函数 H，与 X,Y 独立，则 $X+Y+Z=U+Z$ 有分布函数 $(F*G)*H$. 利用 $(X+Y)+Z=X+(Y+Z)$，我们有 $(F*G)*H=F*(G*H)$. 于是可以把 $(F*G)*H$ 写成 $F*G*H$.

现在设 $h(t)$ 是 $[0,\infty)$ 上的局部有界函数 (指在任何有限区间 $[0,b)$ 上有界的函数)，$G(t)$ 是 $[0,\infty)$ 上单调不减的右连续函数，也称

$$h*G(t)=\int_0^t h(t-s)dG(s),\ t\geq 0$$

为 h,G 的卷积. 令 $t=0$ 时得到 $h*G(0)=h(0)G(0)$，并且有

$$\sup_{0\leq t\leq b}|h*G(t)|\leq\int_0^b \sup_{0\leq t\leq b}|h(t)|dG(s)=\sup_{0\leq t\leq b}|h(t)|G(b),$$

所以 $h*G(t)$ 也是 $[0,\infty)$ 上的局部有界函数.

对于另外的 $[0,\infty)$ 上单调不减的右连续函数 H，可以定义 $(h*G)*H(t)$. 下面证明

$$(h*G)*H(t) = h*(G*H)(t),\ t\geq 0.$$

由于只需要对每个固定的 t 证明上式，所以无妨设 G 和 H 分别是 Y 和 Z 的分布函数，Y,Z 独立. 于是

$$\begin{aligned}
E[h(t-(Y+Z))I[Y+Z\leq t]] &= \int_0^t E[h(t-Y-Z)I[Y+Z\leq t]|Z=z]dH(z)\\
&= \int_0^t E[h(t-Y-z)I[Y+z\leq t]]dH(z)\\
&= \int_0^t (\int_0^{t-z} h(t-y-z)dG(y))dH(z)\\
&= \int_0^t h*G(t-z)dH(z)\\
&= (h*G)*H(t),\ t\geq 0.
\end{aligned}$$

另一方面，$U=Y+Z$ 有分布函数 $G*H$，所以又有

$$\begin{aligned} E[h(t-(Y+Z))I[Y+Z\leq t]] &= E[h(t-U)I[U\leq t]] \\ &= \int_0^t h(t-u)d(G*H)(u) \\ &= h*(G*H)(t). \end{aligned}$$

于是得证. 从而我们可以把括号省去，得到

$$h*G*H(t)=h*(G*H)(t)=(h*G)*H(t).$$

如果 $\{X_i\}$ 是独立同分布随机变量序列，有共同的分布函数 $F(x)$，则用

$$F_n(t) = P(S_n \leq t)$$

表示 $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ 的分布函数时，有

$$F_1(t) = F(t),\ F_2(t) = F * F(t),\ \cdots,\ F_n(t) = F * F * \cdots * F(t).$$

于是称 $F_n(t)$ 是 F 的 n 重卷积.

对任何使得 $i+j=n$ 的非负整数 i,j，可以看出有公式

$$F_n(t)=F_i*F_j(t).$$

另外，只要 $\mu=E[X_1]>0$，由强大数律得到 $S_n\to\infty$ a.s.，所以对任意 $t<\infty$，

$$\lim_{n\to\infty}F_n(t)=\lim_{n\to\infty}P(S_n\le t)=0.$$

定理 1.2

设 $F(t)$ 是非负随机变量 X 的分布函数，$h(t)$ 是 $[0,\infty)$ 上的局部有界函数，G，H 是 $[0,\infty)$ 上单调不减的右连续函数，则对 $t\geq 0$，有

(1) $G*H(t)=H*G(t)$;

(2) $h*(G+H)=h*G+h*H$;

(3) $h*G*H(t)=(h*G)*H(t)=h*(G*H)(t)$;

(4) $\lim_{n\to\infty}F_n(t)=0$;

(5) 已知 $F(t)$ 时，方程 $h(t)=h*F(t)$ 只有零解 $h\equiv 0$;

(6) $m(t)=F(t)+m*F(t)$，其中 $m(t)=\sum_{k=1}^{\infty}F_k(t)$ 是更新函数.

证明.

只需要证明 (5) 和 (6). 对于任何取定的 t，由卷积的定义知道

$$|h * F_n(t)| \leq \sup_{0\leq s\leq t} |h(s)|F_n(t) \to 0, \text{ 当 } n \to \infty \text{ 时.}$$

于是反复用 $h(t) = h * F(t)$ 得到

$$\begin{aligned} h(t) &= h * F(t) = (h * F) * F(t) = h * F_2(t) \\ &= \cdots\cdots \\ &= h * F_n(t) \to 0. \end{aligned}$$

证明.

下面我们来证明 (6)，根据单调收敛定理，我们有

$$
\begin{aligned}
m(t) &= F(t) + \lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n} F_{k-1} * F(t) \\
&= F(t) + \lim_{n\to\infty}\int_0^t \sum_{k=2}^{n} F_{k-1}(t-s)dF(s) \\
&= F(t) + \int_0^t \sum_{k=2}^{\infty} F_{k-1}(t-s)dF(s) \\
&= F(t) + \int_0^t m(t-s)dF(s) \\
&= F(t) + m * F(t).
\end{aligned}
$$

从而得证. $\square$

更新方程

我们仍用 $\{N(t)\}$ 表示更新间隔为 $\{X_i\}$ 的更新过程. 设 $h(t)$ 是已知的局部有界函数，$F(t)$ 是更新间隔 X_i 的分布函数. 未知函数 $B(t)$ 满足的方程

$$B(t) = h(t) + \int_0^t B(t-s)dF(s) \tag{2.1}$$

称为更新方程.

定理 2.1

更新方程 (2.1) 有唯一局部有界解

$$B(t) = h(t) + \int_0^t h(t-s)dm(s), \tag{2.2}$$

其中 $m(t) = E[N(t)]$ 是更新函数.

证明.

因为由 (2.2) 定义的 $B(t)$ 满足

$$\sup_{0\le s\le t}|B(s)| \le \sup_{0\le s\le t}|h(s)| + \sup_{0\le s\le t}|h(s)|m(t) < \infty,$$

所以是局部有界函数. 下面验证它满足 (2.1). 由 $m(t) = F(t) + m * F(t)$ 得到

$$\begin{aligned}
B(t) &= h(t) + \int_0^t h(t-s)dm(s) \\
&= h(t) + h * m(t) \\
&= h(t) + h * F(t) + h * m * F(t) \\
&= h(t) + (h + h * m) * F(t) \\
&= h(t) + B * F(t) \\
&= h(t) + \int_0^t B(t-s)dF(s).
\end{aligned}$$

证明.

所以由 (2.2) 定义的 $B(t)$ 是 (2.1) 的解. 如果 $B_1(t)$ 也是 (2.1) 的局部有界解, 则局部有界函数 $b(t) = B(t) - B_1(t)$ 满足

$$b(t) = \int_0^t b(t-s)dF(s) = b * F(t).$$

由定理 1.2 (5) 我们知 $b(t)$ 恒等于 0，所以局部有界解是唯一存在的. □

一种生物的个体在寿终时以概率 p_i 分裂成 i 个后代. 所有后代独立成活，寿终时又以概率 p_i 分裂成 i 个后代. 如果这种生物的寿命是来自总体 T 的随机变量，我们关心随着时间的推移，生物钟总数的平均增长情况.
先考虑一个生物的分裂问题. 将这个生物的降生时刻记为零时刻，用 $X(t)$ 表示 t 时刻该生物的后代数目，$\{X(t)\}$ 被称为 分支过程. 我们讨论 $EX(t)$ 的增长速度. 用 Y 表示 $\{p_i\}$ 为概率分布的随机变量，则每个生物寿终时平均分裂成

$$\mu_Y = E[Y] = \sum_{i=0}^{\infty} ip_i$$

个生物.

命题 3.1

对于分支过程 $\{X(t)\}$，设 $X(0)=1$，用 T_1 表示第一个体的寿命. 如果 $P(T_1>0)=1$，则有

$$E[X(t)|T_1=s]=\begin{cases}1, & \text{当 } 0\le t<s,\\ \mu_Y E[X(t-s)] & \text{当 } 0<s\le t.\end{cases}$$

证明.

用 Y_1 表示第一个个体寿终时分裂出的后代数. 已知 $T_1 = s > t \geq 0$ 时, t 时只有一个个体, 故 $X(t) = 1$. 已知 $T_1 = s \leq t$ 时, 如果在 s 时刻该个体分裂成了 i 个个体, 则 $Y_1 = i$. 这 i 个个体独立生存, 并且从 s 开始计时, 经过 $t - s$ 时间, 这 i 个个体的平均后代数为 $iE[X(t-s)]$. 于是对 $0 < s \leq t$, 由定理 ?? 我们有

$$
\begin{aligned}
E[X(t)|T_1 = s] &= \sum_{i=1}^{\infty} E[X(t)|T_1 = s, Y_1 = i] P(Y_1 = i|T_1 = s) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} iE[X(t-s)] p_i = \mu_Y E[X(t-s)].
\end{aligned}
$$

从而得证. □

用 $G(y) = P(Y \le y)$ 表示 Y 的分布函数. $\mu_Y = E[Y] \le 1$ 表明每个个体的平均后代数不大于 1. 这样的生物群体最终一定会消亡，不必讨论. 下面讨论 $\mu_Y > 1$ 的情况.

命题 3.2

对于分支过程 $\{X(t)\}$，用 $M(t) = E[X(t)]$ 表示 t 时单一个体的后代平均数，假设生物的寿命 T 不是格点随机变量，有分布函数 $F(x) = P(T \le x)$ 和数学期望 $\mu_Y > 1$，且 $F(0) = 0$，则有

$$\lim_{t\to\infty} \frac{M(t)}{e^{\alpha t}} = \frac{\mu_Y - 1}{\mu_Y^2 \alpha E[Te^{-\alpha T}]},$$

其中 α 是方程

$$E[e^{-\alpha T}] = \frac{1}{\mu_Y} \tag{3.1}$$

的唯一解.

证明.

首先不难看出 $\phi(\alpha) = E[e^{-\alpha T}] = \int_0^\infty e^{-\alpha s} dF(s)$ 是 α 的单调连续函数，$\phi(0) = 1 > 1/\mu_Y$，$\phi(\infty) = 0 < 1/\mu_Y$，所以 (3.1) 有唯一解 α.

用 T_1 表示第一个个体的寿命. 利用全概率公式以及命题 3.1 我们有

$$\begin{aligned} M(t) = E[X(t)] &= \int_0^\infty E[X(t)|T_1 = s] dF(s) \\ &= \int_{t+}^\infty 1 dF(s) + \int_0^t \mu_Y M(t-s) dF(s) \\ &= \overline{F}(t) + \int_0^t \mu_Y M(t-s) dF(s), \end{aligned}$$

其中 $\int_{t+}^\infty = \int_{(t,\infty)}$.

证明.

上式两边同乘以 $e^{-\alpha t}$，得到更新方程

$$\frac{M(t)}{e^{\alpha t}} = e^{-\alpha t}\overline{F}(t) + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} M(t-s)dG(s),$$

其中

$$G(s) = \mu_Y \int_0^s e^{-\alpha u} dF(u)$$

是概率分布函数，使得 $dG(s) = \mu_Y e^{-\alpha s} dF(s)$.

证明.
由定理 2.1 我们有

$$\frac{M(t)}{e^{\alpha t}} = e^{-\alpha t}\overline{F}(t) + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)}\overline{F}(t-s)dm_G(s),$$

其中 $m_G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(s)$ 是更新函数. 再利用关键更新定理和 $e^{-\alpha t}\overline{F}(t) \to 0(t \to \infty)$，得到

$$\lim_{t\to\infty} \frac{M(t)}{e^{\alpha t}} = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t}\overline{F}(t)dt,$$

其中

$$\mu_G = \int_0^{\infty} tdG(t) = \mu_Y \int_0^{\infty} te^{-\alpha t}dF(t) = \mu_Y E[Te^{-\alpha T}].$$

证明.

注意

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-\alpha t}\overline{F}(t)dt &= \int_0^\infty e^{-\alpha t}\int_t^\infty dF(s)dt \\ &= \int_0^\infty (\int_0^s e^{-\alpha t}dt)dF(s) \\ &= \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty (1-e^{-\alpha t})dF(s) \\ &= \frac{1}{\alpha}(1-E[e^{-\alpha T}]) \\ &= \frac{1}{\alpha}(1-\frac{1}{\mu_Y}) = \frac{\mu_Y - 1}{\alpha\mu_Y}.\end{aligned}$$

证明.

于是得到

$$\lim_{t\to\infty}\frac{M(t)}{e^{\alpha t}}=\frac{(\mu_Y-1)/\alpha\mu_Y}{\mu_Y E[Te^{-\alpha T}]}=\frac{\mu_Y-1}{\mu_Y^2\alpha E[Te^{-\alpha T}]}.$$

从而得证. □

上面命题表明只要 $\mu_Y>1$，$M(t)=E[X(t)]$ 与 $e^{\alpha t}$ 有相同的增长速度，也就是说分支过程的平均增长速度是指数阶的.