

开系统

多个状态的系统

习题讲解

第 11 讲 开系统

开系统

多个状态的系统

习题讲解

开系统

多个状态的系统

习题讲解

如果把冰箱视为一个工作系统, 则称 U_i 为系统的第 i 个开状态时间, 称 V_i 为系统的第 i 个关状态时间. 由于系统只有开关两个状态, 所以称为**开关系统**.

我们关心一个系统在一段时间内处于开状态的时间比例. 如果同时有多个系统运行, 我们还关心同一时间有多少个系统处于开状态.

引入更新间隔 $X_i = U_i + V_i (i \geq 1)$. 称以 X_i 为更新间隔的更新过程 $\{N(t)\}$ 为交替更新过程.

在前 n 次更新中, 系统处于开状态的比例是

$$\frac{\sum_{i=1}^n U_i}{\sum_{i=1}^n (U_i + V_i)}.$$

在引入 $X = U + V$, 则 $\{X_i\}$ 是来自总体 X 的随机变量. 设

$$\mu_U = E[U], \mu_V = E[V], \mu_X = E[X] = \mu_U + \mu_V.$$

利用强大数律我们有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n U_i}{\sum_{i=1}^n (U_i + V_i)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n U_i}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (U_i + V_i)} = \frac{\mu_U}{\mu_U + \mu_V} \text{ a.s..}$$

所以, 我们可以想象, 当 t 充分大时, “ t 时开” 的概率 $P(t \text{ 时开})$ 会收敛到 $\frac{\mu_U}{\mu_U + \mu_V}$. 下面我们来证明这个结论.

用 $\bar{G}(t)$ 表示 U_1 的生存函数, 用 $F_n(x) = P(S_n \leq x)$ 表示 S_n 的分布函数, 则 $F(x) = F_1(x)$.

定理 1.1

如果 X_1 不是格点随机变量, μ_U, μ_V 是正数, 则

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(t \text{ 时开}) = \frac{\mu_U}{\mu_U + \mu_V},$$
$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(t \text{ 时关}) = \frac{\mu_V}{\mu_U + \mu_V}.$$

证明.

对于 $t > 0$, 利用 $\{N(t) = 0\} = \{X_1 > t\}$ 得到

$$\begin{aligned}P(t \text{ 时开}, N(t) = 0) &= P(t \text{ 时开}, X_1 > t) \\&= P(U_1 > t, X_1 > t) \\&= P(U_1 > t) \\&= \overline{G}(t).\end{aligned}$$

证明.

对于 $n \geq 1$ 以及 $s \in [0, t]$, 在条件 $S_n = s$ 下, $S_{n+1} = s + X_{n+1} > t$ 发生时, 有 $\{t \text{ 时开}\} = \{U_{n+1} > t - s\}$. 这表明: 对 $s \leq t$, 有

$$\begin{aligned} P(t \text{ 时开}, N(t) = n | S_n = s) &= P(t \text{ 时开}, S_n \leq t, S_{n+1} > t | S_n = s) \\ &= P(U_{n+1} > t - s, s + X_{n+1} > t | S_n = s) \\ &= P(U_{n+1} > t - s, X_{n+1} > t - s) \\ &= P(U_{n+1} > t - s) = \overline{G}(t - s). \end{aligned}$$

证明.

事件 $\{N(t) = n\} (n = 0, 1, \dots)$ 构成完备事件组. 利用全概率公式我们有:

$$\begin{aligned}
 P(t \text{ 时开}) &= P(t \text{ 时开}, N(t) = 0) + \sum_{n=1}^{\infty} P(t \text{ 时开}, N(t) = n) \\
 &= \overline{G}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t P(t \text{ 时开}, N(t) = n | S_n = s) dF_n(s) \\
 &= \overline{G}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \overline{G}(t-s) dF_n(s) \\
 &= \overline{G}(t) + \int_0^t \overline{G}(t-s) dm(s).
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

注意 X_1 不是格点随机变量, $\overline{G}(s)$ 是单调不增函数, 积分

$$\int_0^{\infty} \overline{G}(s) ds = \mu_U < \infty.$$

证明.

所以当 $t \rightarrow \infty$ 时, 由 $\overline{G}(t) \rightarrow 0$ 和关键更新定理我们有

$$P(t \text{ 时开}) \rightarrow \frac{1}{\mu_X} \int_0^\infty \overline{G}(s) ds = \frac{\mu_U}{\mu_U + \mu_V}.$$

最后得到

$$P(t \text{ 时关}) = 1 - P(t \text{ 时开}) \rightarrow \frac{\mu_V}{\mu_U + \mu_V}.$$

从而得证.



对于 $b > a \geq 0$, 为了研究时间段 $(a, b]$ 中开状态的平均长度引入

$$U(t) = \begin{cases} 1, & \text{当 } t \text{ 是开状态,} \\ 0, & \text{当 } t \text{ 是关状态,} \end{cases}$$

则

$$W(t) = \int_0^t U(s) ds$$

是 $[0, t]$ 中开状态时间的长度,

$$W(a, b] = \int_a^b U(s) ds$$

是 $(a, b]$ 中开状态时间的长度, $E[W(a, b)]$ 是 $(a, b]$ 中开状态的平均长度. 我们知

$$h(t) = E[U(t)] = P(t \text{ 时开})$$

是 $(a, b]$ 中的黎曼可积函数.

定理 1.2

如果 μ_U, μ_V 是正数, X_1 不是格点随机变量, 则

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E[W(a+t, b+t)] = \frac{(b-a)\mu_U}{\mu_U + \mu_V}.$$

证明.

因为 $\{N(t)\}$ 在 $(a, b]$ 中只有有限次更新, 所以 $U(t)$ 的每条轨迹都是 $(a, b]$ 中的阶梯函数, 只有有限个跳跃点, 从而是黎曼可积函数. 按照黎曼积分的定义, 将 $(a, b]$ 进行 n 等分, 记等分点为

$$a_k = a + (b - a)k/n, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

则有

$$\int_a^b U(s)da = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n \text{ a.s.}, \text{ 其中 } \xi_n = \sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n} U(a_k).$$

证明.

因为 ξ_n 有界: $|\xi_n| \leq b - a$, 所以用有界收敛定理我们有

$$\begin{aligned} E[W(a, b)] &= E\left[\int_a^b U(s)ds\right] = \lim_{n \rightarrow \infty} E[\xi_n] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n} E[U(a_k)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n} h(a_k) \\ &= \int_a^b h(s)ds. \end{aligned}$$

把 a, b 分别换成 $a+t, b+t$, 得到

$$E[W(a+t, b+t)] = \int_{a+t}^{b+t} h(s)ds = \int_a^b h(t+s)ds.$$

注意 $h(t)$ 有界, 且 $\lim_{t \rightarrow \infty} = \mu_U / (\mu_U + \mu_V)$, 所以再由有界收敛定理我们有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E[W(a+t, b+t)] = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^b h(t+s)ds = \frac{(b-a)\mu_U}{\mu_U + \mu_V}.$$

□

例 1.3

设开关系统的平均间隔时间是 0.24 h, 在开状态耗电 0.8 kW/h, 在关状态的耗电忽略不计.

- (1) 运行了 10 天的系统在下一周的平均耗电量是多少?
- (2) 如果这个系统的 $\mu_U = 0.03$ h, $\mu_V = 0.21$ h, 系统在下一周中的平均耗电量是多少 kW?

证明.

相对于平均时间间隔 0.24h, 10 天已经足够长了, 按照定理 1.2, 以后的一周中, 系统处于开状态的平均时间为

$$7 \times 24 \times \frac{\mu_U}{\mu_u = \mu_v} = \frac{168\mu_U}{\mu_U + \mu_V}.$$

(1) 工作时耗电 0.8 kW/h, 所以一周的平均耗电量是

$$\frac{0.8 \times 168\mu_U}{\mu_U + \mu_V} = \frac{134.4\mu_U}{\mu_U + \mu_V} (\text{kW}).$$

(2) 将条件代入, 我们得到一周的平均耗电量为

$$\frac{134.4 \times 0.03}{0.03 + 0.21} \text{kW} = 16.8 \text{kW}.$$



例 1.4

一个住宅小区有 2000 台冰箱. 设每台冰箱的开关时间分别有数学期望 $\mu_U = 0.03$, $\mu_V = 0.21$. 在时刻 t ,

- (1) 计算处于开状态冰箱数 ξ 的数学期望 μ 和标准差 σ ;
- (2) 在置信度 0.95 下, 计算处于开状态的冰箱数 ξ 的置信区间.

解.

t 时任一台冰箱处于开状态的概率是

$$p = \frac{0.03}{0.03 + 0.21} = 0.125.$$

对 $m = 2000$ 和 $i = 1, 2, \dots, m$, 引入

$$\xi_i = \begin{cases} 1, & \text{当 } t \text{ 时第 } i \text{ 台在工作,} \\ 0, & \text{否则,} \end{cases}$$

则 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ 相互独立, 有共同的数学期望 p 和方差 $p(1 - p)$.

解.

(1) t 时处于开状态的冰箱数是 $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_m$, 要计算的数学期望是

$$\mu = E\xi = mp = 2000 \times 0.125 = 250(\text{台}),$$

标准差是

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(\xi)} = \sqrt{mp(1-p)} = 14.79(\text{台}).$$

解.

(2) 由中心极限定理我们知近似地有

$$\frac{\xi - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1).$$

于是由

$$P(|\xi - \mu| \leq 1.96\sigma) = P(|\frac{\xi - \mu}{\sigma}| \leq 1.96) \approx 0.95$$

得到 ξ 的置信度为 0.95 的置信区间

$$[\mu - 1.96\sigma, \mu + 1.96\sigma] \approx [221, 279].$$

也就是说, 以 0.95 的概率保证, t 时处于开状态的冰箱数在 221 和 279 台之间.



开关系统

多个状态的系统

习题讲解

开关系统

多个状态的系统

习题讲解

多个状态的系统

设一个系统有 r 个工作状态. 系统在一开始处于状态 1, 在状态 1 工作 U_{11} 时间后进入状态 2, 在状态 2 工作 U_{12} 时间后进入状态 3, $\dots\dots$, 在状态 $r-1$ 工作 $U_{1,r-1}$ 时间后进入状态 r , 在状态 r 工作 U_{1r} 时间后完成一次循环, 重新进入状态 1; 在状态 1 工作 U_{21} 时间后进入状态 2, 在状态 2 工作 U_{22} 时间后进入状态 3, $\dots\dots$, 在状态 $r-1$ 工作 $U_{2,r-1}$ 时间后进入状态 r , 在状态 r 工作 U_{2r} 时间后完成一次循环, 重新进入状态 1; $\dots\dots$.

可以看出 U_{ij} 是第 i 次循环处于状态 j 的工作时间长度. 引入

$$\mathbf{X} = (U_1, U_2, \dots, U_r).$$

认为

$$\mathbf{U}_i = (U_{i1}, U_{i2}, \dots, U_{ir}), \quad i = 1, 2, \dots$$

是来自总体 $\mathbf{X}$ 的随机向量. 对于给定的 $j = 1, 2, \dots, r$, $\{U_{ij} | i = 1, 2, \dots\}$ 是来自总体 U_j 的随机变量.

引入更新时间隔

$$X_i = U_{i1} + U_{i2} + \cdots + U_{ir}, \quad i = 1, 2, \cdots,$$

以及以 $\{X_i\}$ 为更新时间隔的更新过程 $\{N(t)\}$, 称 $\{N(t)\}$ 为有 r 个状态的更新过程. 这时 $\{X_i\}$ 是来自总体 $X = U_1 + U_2 + \cdots + U_r$ 的随机变量.

用 $\mu_i = E[U_i]$ 表示一个循环中系统处于第 i 个状态的平均时间长度. 我们有以下的结论.

定理 2.1

如果 X 不是格点随机变量, 数学期望 $\mu = E[X] \in (0, \infty)$, 则

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(t \text{ 时处于状态 } j) = \frac{\mu_j}{\mu_1 + \cdots + \mu_r}.$$

证明.

当 $j = 1$ 时, 把状态 1 称为开状态, 把其余的状态统称为关状态. 这相当于在开关系统中

$$U_i = U_{i1}, \quad V_i = U_{i2} + \cdots + U_{ir}, \quad i = 1, 2, \cdots.$$

利用定理 1.1 我们有结论成立.

当 $j = r$ 时, 把状态 $1, 2, \cdots, r-1$ 都称为开状态, 把状态 r 称为关状态. 这相当于在开关系统中

$$U_i = U_{i1} + \cdots + U_{i,r-1}, \quad V_i = U_{ir}, \quad i = 1, 2, \cdots.$$

利用定理 1.1 我们有结论成立.

证明.

当 $1 < j < r$ 时, 对 $i = 1, 2, \dots$, 引入

$$U_i = U_{i1} + \dots + U_{i,j-1}, \quad W_i = U_{ij}, \quad V_i = U_{i,j+1} + \dots + U_{ir},$$

则 $X_i = U_i + W_i + V_i$. 将 $\{N(t)\}$ 视为有 U, W, V 三种状态的工作状态, 则有

$$P(t\text{时处于状态 } U) + P(t\text{时处于状态 } W) + P(t\text{时处于状态 } V) = 1.$$

证明.

由上面刚得到的结论我们有

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} P(t \text{ 时处于状态 } j) &= \lim_{t \rightarrow \infty} P(t \text{ 时处于状态 } W) \\&= 1 - \lim_{t \rightarrow \infty} P(t \text{ 时处于状态 } U) - \lim_{t \rightarrow \infty} P(t \text{ 时处于状态 } V) \\&= 1 - \frac{\mu_1 + \cdots + \mu_{j-1}}{\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_r} - \frac{\mu_{j+1} + \cdots + \mu_r}{\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_r} \\&= \frac{\mu_j}{\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_r}.\end{aligned}$$

□

开系统

多个状态的系统

习题讲解

开系统

多个状态的系统

习题讲解

例 3.1

从 $t = 0$ 开始, 汽车按强度 λ 的泊松流驶入京沪高速路, 车速是独立同分布的随机变量, 有共同的分布函数 $G(t)$. 在时刻 t , 用 X 表示从北京驶往上海且位于公路段 $[a, b]$ 的汽车数, 计算 X 的概率分布.

证明.

用 $N(t)$ 表示 $[0, t]$ 内进入高速路的车数. 已知 $N(t) = n$ 时, 这 n 辆车每一辆的进入时间 S 在 $[0, t]$ 中均匀分布. 每一辆车在 t 时位于 $[a, b]$ 的概率为

$$\begin{aligned} p &= P(a \leq (t-s)V \leq b) = \frac{1}{t} \int_0^t P(a \leq (t-s)V \leq b) ds \\ &= \frac{1}{t} \int_0^t [G(b/(t-s)) - G(a/(t-s))] ds. \end{aligned}$$

用 $Y_j = 1, 0$ 分别表示第 j 辆车位于或没位于 $[a, b]$, $\{Y_j\}$ 与 $\{N(t)\}$ 独立. t 时位于 $[a, b]$ 的车数 $M = \sum_{j=1}^{N(t)} Y_j \sim \mathcal{P}(\lambda tp)$. □