

第 12 讲 年龄和剩余寿命

年龄 $A(t)$ 的分布

剩余寿命 $R(t)$ 的分布

t 时服役部件的寿命分布

$S_{N(t)}$ 的分布函数

总结

习题讲解

年龄 $A(t)$ 的分布

剩余寿命 $R(t)$ 的分布

t 时服役部件的寿命分布

$S_{N(t)}$ 的分布函数

总结

习题讲解

年龄 $A(t)$ 的分布

剩余寿命 $R(t)$ 的分布

t 时服役部件的寿命分布

$S_{N(t)}$ 的分布函数

总结

习题讲解

用非负随机变量 X 表示某种设备的使用寿命. 则时间 t 时服役的设备的更新时刻为 t 以前的最后一次更新时刻 $S_{N(t)}$, 寿终时刻为 t 之后的第一次更新时刻 $S_{N(t)+1}$. 同样地我们定义

$$A(t) = t - S_{N(t)}, R(t) = S_{N(t)+1} - t.$$

$A(t)$ 是 t 时服役的部件的使用年龄, $R(t)$ 是 t 时服役的部件的剩余寿命. 以后将 $A(t)$ 简称为 年龄, 将 $R(t)$ 简称为 剩余寿命.

假设设备已经使用很久了, 这相当于更新过程在很久之前就开始了, 所以研究现在服役的设备还能工作多长时间, 只需研究 $t \rightarrow \infty$ 时的极限

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(R(t) \leq y).$$

用 $F(y)$ 表示更新间隔 X_i 的分布函数: $F(y) = P(X_i \leq y)$. 用 $\mu = E[X_i]$ 表示 X_i 的数学期望. 下面设 $\mu \in (0, \infty)$.

年龄 $A(t)$ 的分布

剩余寿命 $R(t)$ 的分布

t 时服役部件的寿命分布

$S_{N(t)}$ 的分布函数

总结

习题讲解

年龄 $A(t)$ 的分布

剩余寿命 $R(t)$ 的分布

t 时服役部件的寿命分布

$S_{N(t)}$ 的分布函数

总结

习题讲解

设一个工作系统的某易损部件有独立同分布的使用寿命 X_1, X_2, \dots . 部件损坏后立即更新, 相应的更新过程是 $\{N(t)\}$. 对于固定的 $y > 0$, 设每个部件的试用期为 y , 试用期后进入工作期. 让我们把试用期称为开状态, 把工作期称为关状态. 一个部件的使用寿命如果小于 y , 则只有开状态, 没有关状态.

用数学符号表示出来: 第 i 个部件的试用期是 $U_i = \min(y, X_i)$, 工作期是 $V_i = X_i - U_i$. 可以看出 (U_i, V_i) ($i = 1, 2, \dots$) 是独立同分布的随机向量序列, $X_i = U_i + V_i$. 对于 $\{N(t)\}$ 来讲, t 时为开状态的充分必要条件是 t 时的服役部件的年龄 $A(t) \leq y$, 即有

$$\{A(t) \leq y\} = \{t \text{ 时是开状态}\}.$$

年龄 $A(t)$ 的分布剩余寿命 $R(t)$ 的分布 t 时服役部件的寿命分布 $S_{N(t)}$ 的分布函数

总结

习题讲解

如果 X_i 不是格点随机变量, 则

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(A(t) \leq y) = \lim_{t \rightarrow \infty} P(t \text{ 时开}) = \frac{E[U_1]}{\mu}.$$

因为

$$\begin{aligned} E[U_1] &= E[\min(y, X_1)] = \int_0^\infty P(\min(y, X_1) > s) ds \\ &= \int_0^\infty P(y > s, X_1 > s) ds = \int_0^y P(X_1 > s) ds \\ &= \int_0^y \bar{F}(s) ds, \end{aligned}$$

年龄 $A(t)$ 的分布

剩余寿命 $R(t)$ 的分布

t 时服役部件的寿命分布

$S_{N(t)}$ 的分布函数

总结

习题讲解

所以有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(A(t) \leq y) = \frac{1}{\mu} \int_0^y \bar{F}(s) ds.$$

也就是说, 对于较大的 t , 年龄 $A(t)$ 的分布函数可以用

$$F_A(y) = \frac{1}{\mu} \int_0^y \bar{F}(s) ds, \quad y \geq 0$$

近似, 其中 $\mu = E[X_i]$.

年龄 $A(t)$ 的分布

剩余寿命 $R(t)$ 的分布

t 时服役部件的寿命分布

$S_{N(t)}$ 的分布函数

总结

习题讲解

年龄 $A(t)$ 的分布

剩余寿命 $R(t)$ 的分布

t 时服役部件的寿命分布

$S_{N(t)}$ 的分布函数

总结

习题讲解

如果认为易损部件在寿终前的 y 小时进入异常状态，并把异常状态称为关状态，把异常之前的正常状态称为开状态，则第 i 个部件的关状态时间为

$$V_i = \min(y, X_i), \text{ 开状态时间为 } U_i = X_i - V_i.$$

可以看出 (U_i, V_i) ($i = 1, 2, \dots$) 也是独立同分布的随机向量序列，

$X_1 = U_i + V_i$. $\{N(t)\}$ 是以 $\{X_i\}$ 为更新间隔的更新过程. 对于 $\{N(t)\}$ 来讲， t 时是关状态的充分必要条件是 t 时服役部件的剩余寿命 $R(t) \leq y$ ，即

$$\{R(t) \leq y\} = \{t \text{ 时是关状态}\}.$$

如果 X_i 不是格点随机变量，则

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(R(t) \leq y) = \lim_{t \rightarrow \infty} P(t \text{ 时关}) = \frac{E[V_1]}{\mu}.$$

因为

$$E[V_i] = E[\min(y, X_1)] = \int_0^y \bar{F}(s) ds,$$

所以得到

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(R(t) \leq y) = \frac{1}{\mu} \int_0^y \bar{F}(s) ds.$$

也就是说, 对于较大的 t , 剩余寿命 $R(t)$ 的分布函数也可以用

$$F_R(y) = \frac{1}{\mu} \int_0^y \bar{F}(s) ds, \quad y \geq 0$$

近似, 其中 $\mu = E[X_i]$.

年龄 $A(t)$ 的分布

剩余寿命 $R(t)$ 的分布

t 时服役部件的寿命分布

$S_{N(t)}$ 的分布函数

总结

习题讲解

年龄 $A(t)$ 的分布

剩余寿命 $R(t)$ 的分布

t 时服役部件的寿命分布

$S_{N(t)}$ 的分布函数

总结

习题讲解

年龄 $A(t)$ 的分布

剩余寿命 $R(t)$ 的分布

t 时服役部件的寿命分布

$S_{N(t)}$ 的分布函数

总结

习题讲解

t 时服役部件的寿命是该部件在 t 是的年龄和剩余寿命之和:

$$X_{N(t)+1} = A(t) + R(t) = S_{N(t)+1} - S_{N(t)}.$$

对于确定的 $y > 0$, 为了得到 $X_{N(t)+1}$ 的极限分布, 利用示性函数 $1[\cdot]$ 定义

$$U_i = X_i 1[X_i > y], \quad V_i = X_i I[X_i \leq y], \quad i = 1, 2, \dots.$$

于是 (U_i, V_i) ($i = 1, 2, \dots$) 是独立同分布的随机向量, 且 $X_i = U_i + V_i$. 用 $\{N(t)\}$ 表示以 $\{U_i\}$ 为开状态, 以 $\{V_i\}$ 为关状态的开关系统. 对于更新过程 $\{N(t)\}$ 来讲, 一个部件的使用寿命 $\leq y$ 时, 这个部件就一直处于关状态, 否则一直处于开状态. 于是服役部件在 t 时处于关状态的充分必要条件是其使用寿命 $X_{N(t)+1} \leq y$, 即

$$\{X_{N(t)+1} \leq y\} = \{t \text{ 是关状态}\}.$$

年龄 $A(t)$ 的分布剩余寿命 $R(t)$ 的分布 t 时服役部件的寿命分布 $S_{N(t)}$ 的分布函数

总结

习题讲解

如果 X_i 不是格点随机变量, 则

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(X_{N(t)+1} \leq y) = \lim_{t \rightarrow \infty} P_t(t \text{ 时关}) = \frac{E[V_1]}{\mu}.$$

注意到

$$E[V_1] = E[X_1 I[X_1 \leq y]] = \int_0^y s dF(s).$$

所以得到

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(X_{N(t)+1} \leq y) = \frac{1}{\mu} \int_0^y s dF(s).$$

也就是说, 对于较大的 t , t 时服役部件的使用寿命可以用

$$F_X(y) = \frac{1}{\mu} \int_0^y s dF(s)$$

近似, 其中 $\mu = E[X_i]$.

年龄 $A(t)$ 的分布

剩余寿命 $R(t)$ 的分布

t 时服役部件的寿命分布

$S_{N(t)}$ 的分布函数

总结

习题讲解

年龄 $A(t)$ 的分布

剩余寿命 $R(t)$ 的分布

t 时服役部件的寿命分布

$S_{N(t)}$ 的分布函数

总结

习题讲解

年龄 $A(t)$ 的分布

剩余寿命 $R(t)$ 的分布

t 时服役部件的寿命分布

$S_{N(t)}$ 的分布函数

总结

习题讲解

我们知 $S_{N(t)}$ 是 t 之前的最后一次更新时间. 下面推导 $S_{N(t)}$ 的分布函数.

利用 $S_0 = 0$, $\{N(t) = n\} = \{S_n \leq t, S_{n+1} > t\}$, 对 $x \in [0, t]$ 得到

$$\begin{aligned}
 P(S_{N(t)} \leq x) &= P(S_0 \leq x, N(t) = 0) + \sum_{n=1}^{\infty} P(S_n \leq x, N(t) = n) \\
 &= P(X_1 > t) + \sum_{n=1}^{\infty} P(S_n \leq x, S_{n+1} > t) \\
 &= \bar{F}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} P(S_n \leq x, S_n + X_{n+1} > t | S_n = s) dF_n(s) \\
 &= \bar{F}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x P(X_{n+1} > t - s) dF_n(s) \\
 &= \bar{F}(t) + \int_0^x \bar{F}(t - s) dm(s).
 \end{aligned}$$

年龄 $A(t)$ 的分布

剩余寿命 $R(t)$ 的分布

t 时服役部件的寿命分布

$S_{N(t)}$ 的分布函数

总结

习题讲解

年龄 $A(t)$ 的分布剩余寿命 $R(t)$ 的分布 t 时服役部件的寿命分布 $S_{N(t)}$ 的分布函数

总结

习题讲解

再由此得到 $A(t)$ 的生存函数

$$\begin{aligned} P(A(t) > x) &= P(t - S_{N(t)} > x) = P(S_{N(t)} < t - x) \\ &= \bar{F}(t) + \int_0^{(t-x)^-} \bar{F}(t-s) dm(s), \quad 0 \leq x \leq t, \end{aligned}$$

其中 $\int_a^{b^-}$ 表示区间 $[a, b)$ 上的积分.

我们也可以计算 $R(t)$ 的生存函数, 对于任意 $t, x, y \geq 0$, 我们有

$$P(R(t) > x | S_1 = y) = \begin{cases} 1 & y > t + x, \\ 0 & t < y \leq t + x, \\ P(R(t - y) > x) & 0 \leq y \leq t. \end{cases}$$

记 $K_x(t) = P(R(t) > x)$, 则

$$K_x(t) = \int_0^\infty P(R(t) > x | S_1 = y) dF(y) = \bar{F}(t + x) + \int_0^t K_x(t - y) dF(y).$$

解上述更新方程, 我们得到

$$P(R(t) > x) = K_x(t) = \bar{F}(t + x) + \int_0^t [\bar{F}(t + x - y)] dm(y).$$

年龄 $A(t)$ 的分布

剩余寿命 $R(t)$ 的分布

t 时服役部件的寿命分布

$S_{N(t)}$ 的分布函数

总结

习题讲解

年龄 $A(t)$ 的分布

剩余寿命 $R(t)$ 的分布

t 时服役部件的寿命分布

$S_{N(t)}$ 的分布函数

总结

习题讲解

定理 5.1

设 $\{X_i\}$ 是更新过程 $\{N(t)\}$ 的更新间隔, $m(t) = E[N(t)]$ 是更新函数, $\bar{F}(s) = P(X_1 > s)$, $\mu = E[X_1] \in (0, \infty)$, 则

(1) $S_{N(t)}$ 有分布函数

$$F_{S_{N(t)}}(x) = P(S_{N(t)} \leq x) = \bar{F}(t) + \int_0^x \bar{F}(t-s) dm(s), \quad 0 \leq x \leq t;$$

(2) $A(t)$ 有生存函数

$$\bar{F}_{A(t)}(x) = \bar{F}(t) + \int_0^{(t-x)^-} \bar{F}(t-s) dm(s);$$

(3) 当 X_1 不是格点随机变量时, 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(A(t) \leq y) = \frac{1}{\mu} \int_0^y \bar{F}(s) ds,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(R(t) \leq y) = \frac{1}{\mu} \int_0^y \bar{F}(s) ds,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(X_{N(t)+1} \leq y) = \frac{1}{\mu} \int_0^y s dF(s).$$

年龄 $A(t)$ 的分布

剩余寿命 $R(t)$ 的分布

t 时服役部件的寿命分布

$S_{N(t)}$ 的分布函数

总结

习题讲解

由定理 5.1 (1) 得到

$$P(S_{N(t)} = 0) = \bar{F}(t) + \bar{F}(t)m(0) = \bar{F}(t)[1 + m(0)].$$

这说明 $S_{N(t)}$ 一般不是连续型随机变量.
另外, 在式

$$F_{S_{N(t)}}(x) = P(S_{N(t)} \leq x) = \bar{F}(x) + \int_0^x \bar{F}(t-s)dm(s), \quad 0 \leq x \leq t;$$

中关于 x 微分, 我们有

$$dF_{S_{N(t)}}(x) = \bar{F}(t-x)dm(x), \quad 0 < x \leq t.$$

注意 $S_{N(t)} = 0$ 表示 $(0, t]$ 中没有更新发生, 所以 $F(x)$ 连续时,

$$\{S_{N(t)} = 0\} = \{X_1 > t\}.$$

年龄 $A(t)$ 的分布

剩余寿命 $R(t)$ 的分布

t 时服役部件的寿命分布

$S_{N(t)}$ 的分布函数

总结

习题讲解

对于开关系统, 在条件 $S_{N(t)} = 0$ 下, $U_1 > t$ 表示系统的第一次开关状态还没有结束, 所以当 $F(x)$ 连续时,

$$P(t \text{ 时开} | S_{N(t)} = 0) = P(U_1 > t | X_1 > t) = \frac{P(U_1 > t)}{P(X_1 > t)}.$$

用 $N_Y(t)$ 表示以 $\{Y_i\}$ 为更新间隔的更新过程, 对于更新时刻 $\xi_n = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$ 和 $n \geq 1, t \geq 0$, 于是

$$\{\xi_{n-1} \leq t < \xi_n\} = \{N_Y(t) = n - 1\}.$$

例 5.2

甲一开始为自己的手机充值 b 元, 并决定只要发现手机余额小于 a 元就立即充值到 b 元, 以此类推. 假设他的通话间隔是独立同分布的随机变量 $\{X_i\}$, 每次的通话费是独立同分布的随机变量 $\{Y_i\}$, 与 $\{X_i\}$ 独立. 将通话时间忽略不计时, 对于充分大的 t , 估算 t 时手机中至少有 x 元余额的概率 p .

解.

用 $\xi_n = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$ 表示前 n 次通话的总消费. 设第 N_a 次通话后的余额首次少于 a 元, 则有

$$\begin{aligned}\{N_a = n\} &= \{b - \xi_{n-1} \geq a, b - \xi_n < a\} \\ &= \{\xi_{n-1} \leq b - a < \xi_n\} = \{N_Y(b - a) = n - 1\} \\ &= \{N_Y(b - a) + 1 = n\}\end{aligned}$$

于是得到 $N_a = N_Y(b - a) + 1$. 现把每次充值视为一次更新, 第一个更新间隔为 $Z_1 = \sum_{i=1}^{N_n} X_i$. 对 $x \geq a$, 将上面的 a 换成 x , 就知道第 $N_x = N_Y(b - x) + 1$ 次通话后余额首次少于 x 元, 并且 $U_1 = \sum_{i=1}^{N_x} X_i$ 是余额首次少于 x 元的时间. 将余额大于 x 元的时间段称为开状态, 少于等于 x 元的时间段称为关状态, 则有

$$p \approx \lim_{t \rightarrow \infty} P(t \text{ 时开}) = \frac{E[U_1]}{E[Z_1]}.$$

年龄 $A(t)$ 的分布剩余寿命 $R(t)$ 的分布 t 时服役部件的寿命分布 $S_{N(t)}$ 的分布函数

总结

习题讲解

证明.

N_a, N_x 由 Y_i 决定, 与 $\{X_i\}$ 独立. 用瓦尔德定理我们有

$$E[Z_1] = E[N_a]E[X_1] = (m_G(b-a) + 1)E[X_1],$$

$$E[U_1] = E[N_x]E[X_1] = (m_G(b-x) + 1)E[X_1].$$

其中的 $m_G(t) = E[N_Y(t)]$ 是 $N_Y(t)$ 的更新函数. 从而我们有

$$p \approx \frac{1 + m_G(b-x)}{1 + m_G(b-a)}.$$

□

年龄 $A(t)$ 的分布

剩余寿命 $R(t)$ 的分布

t 时服役部件的寿命分布

$S_{N(t)}$ 的分布函数

总结

习题讲解

年龄 $A(t)$ 的分布

剩余寿命 $R(t)$ 的分布

t 时服役部件的寿命分布

$S_{N(t)}$ 的分布函数

总结

习题讲解

例 6.1

人造卫星按照强度为 λ 的 Poisson 流路过靶场上空. 如果试射一枚导弹需要的时间为 s , 计算在时刻 T 发射的导弹不被卫星监测的概率.

证明.

由题意, 人造卫星路过靶场上空的过程是一个泊松过程, 记第 n 次到达的时间为 S_n . 时刻 t 之后第一次有卫星路过的时刻为 $S_{N(t)+1}$. 记

$R(t) = S_{N(t)+1} - t$, 则 $R(t) \sim \mathcal{E}(\lambda)$. 在时刻 t 发射的导弹不被卫星监测当且仅当 $R(t) > s$. 于是我们知在时刻 T 发射的导弹不被卫星监测的概率为

$$P(R(t) > s) = e^{-\lambda s}.$$

