

$A(t)$, $R(t)$ 和更新间隔的比较

$X_{N(t)+1}$ 随机大于更新间隔

$EA(t)$, $E(R(t))$ 和 $EX_{N(t)+1}$ 的极限

更新过程的汇合

第 13 讲 年龄, 寿命与更新间隔的比较

$A(t)$, $R(t)$ 和更新间隔的比较

$X_{N(t)+1}$ 随机大于更新间隔

$EA(t)$, $E(R(t))$ 和 $EX_{N(t)+1}$ 的极限

更新过程的汇合

$A(t)$, $R(t)$ 和更新间隔的比较

$X_{N(t)+1}$ 随机大于更新间隔

$EA(t)$, $E(R(t))$ 和 $EX_{N(t)+1}$ 的极限

更新过程的汇合

定义 0.1

称随机变量 X 随机小于 随机变量 Y , 如果对于一切 s , $P(X \leq s) \geq P(Y \leq s)$. 当 X 随机小于 Y 时, 也称 Y 随机大于 X .

命题 0.2

如果非负随机变量 X 随机小于 Y , 则 Y 是非负随机变量, 并且有

$$E[X] \leq E[Y].$$

证明.

设 X, Y 分别有生存函数 $\bar{F}(s) = P(X > s)$, $\bar{G}(s) = P(Y > s)$, 则对任意 s , $\bar{G}(s) \geq \bar{F}(s)$. 于是有

$$P(Y \geq 0) = \bar{G}(0-) \geq \bar{F}(0-) = 1.$$

所以 Y 是非负随机变量, 并且有

$$E[Y] = \int_0^\infty \bar{G}(s) ds \geq \int_0^\infty \bar{F}(s) ds = E[X].$$

□

$A(t)$, $R(t)$ 和更新间隔的比较

$X_{N(t)+1}$ 随机大于更新间隔

$EA(t)$, $E(R(t))$ 和 $EX_{N(t)+1}$ 的极限

更新过程的汇合

$A(t)$, $R(t)$ 和更新间隔的比较

$X_{N(t)+1}$ 随机大于更新间隔

$EA(t)$, $E(R(t))$ 和 $EX_{N(t)+1}$ 的极限

更新过程的汇合

例 1.1

设 $\{X_i\}$ 独立同分布, 共同的密度函数是

$$F'(x) = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-x/2}, \quad x \geq 0.$$

这是 1 个自由度的卡方分布的密度, $\mu = E[X_1] = 1$. 用 η 表示以

$$F_A(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x \bar{F}(x) dx$$

为分布函数的随机变量. 利用洛必达法则得到

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{F(x)}{F_A(x)} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{\mu f(x)}{1 - F(x)} = \infty.$$

所以对于充分小的正数 x_0 , $F(x_0) > F_A(x_0)$. 利用 $\lim_{t \rightarrow \infty} P(A(t) \leq x) = F_A(x)$ 我们知, 当 t 充分大时, 有

$$P(A(t) \leq x_0) < P(X_1 \leq x_0).$$

所以 $A(t)$ 并不随机小于 X_1 .

$A(t)$, $R(t)$ 和更新间隔的比较

$X_{N(t)+1}$ 随机大于更新间隔

$EA(t)$, $E(R(t))$ 和 $EX_{N(t)+1}$ 的极限

更新过程的汇合

$A(t)$, $R(t)$ 和更新间隔的比较

$X_{N(t)+1}$ 随机大于更新间隔

$EA(t)$, $E(R(t))$ 和 $EX_{N(t)+1}$ 的极限

更新过程的汇合

$A(t)$, $R(t)$ 和更新间隔的比较

$X_{N(t)+1}$ 随机大于更新间隔

$EA(t)$, $E(R(t))$ 和 $EX_{N(t)+1}$ 的极限

更新过程的汇合

定理 2.1

设 $\{X_i\}$ 是更新过程 $\{N(t)\}$ 的更新间隔, $m(t) = E[N(t)]$ 是更新函数, $\bar{F}(s) = P(X_1 > s)$, $\mu = E[X_1] \in (0, \infty)$, 则

(1) $S_{N(t)}$ 有分布函数

$$F_{S_{N(t)}}(x) = P(S_{N(t)} \leq x) = \bar{F}(t) + \int_0^x \bar{F}(t-s) dm(s), \quad 0 \leq x \leq t;$$

(2) $A(t)$ 有生存函数

$$\bar{F}_{A(t)}(x) = \bar{F}(t) + \int_0^{(t-x)-} \bar{F}(t-s) dm(s);$$

(3) 当 X_1 不是格点随机变量时, 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(A(t) \leq y) = \frac{1}{\mu} \int_0^y \bar{F}(s) ds,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(R(t) \leq y) = \frac{1}{\mu} \int_0^y \bar{F}(s) ds,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(X_{N(t)+1} \leq y) = \frac{1}{\mu} \int_0^y s dF(s).$$

$A(t)$, $R(t)$ 和更新间隔的比较

$X_{N(t)+1}$ 随机大于更新间隔

$EA(t)$, $E(R(t))$ 和 $EX_{N(t)+1}$ 的极限

更新过程的汇合

首先由定理 2.1 (1) 和 $S_{N(t)} \leq t$ 得到

$$\bar{F}(t) + \int_0^t \bar{F}(t-s) dm(s) = P(S_{N(t)} \leq t) = 1.$$

用 $\{X_i\}$ 表示更新间隔, 引入

$$U_i = X_i 1[X_i > x], \quad V_i = X_i 1[X_i \leq x], \quad i = 1, 2, \dots,$$

则 (U_i, V_i) ($i = 1, 2, \dots$) 是独立同分布的随机向量序列, 使得 $X_i = U_i + V_i$. 这时, $\{N(t)\}$ 又是以 $\{U_i\}$ 为开状态, 以 $\{V_i\}$ 为关状态的开关系统. 于是 t 时间服役的部件在 t 时处于开状态的充分必要条件是其使用寿命 $X_{N(t)+1} > x$, 即

$$\{X_{N(t)+1} > x\} = \{t \text{ 是开状态}\}.$$

$A(t)$, $R(t)$ 和更新间隔的比较

$X_{N(t)+1}$ 随机大于更新间隔

$EA(t)$, $E(R(t))$ 和 $EX_{N(t)+1}$ 的极限

更新过程的汇合

U_1 的生存函数 $\overline{G}(t)$ 满足

$$\begin{aligned}\overline{G}(t) &= P(U_1 > t) = P(X_1 > x, X_1 > t) \\ &\geq P(X_1 > x)P(X_1 > t) = \overline{F}(x)\overline{F}(t), \quad t \geq 0.\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}P(X_{N(t)+1} > x) &= P(t \text{ 时开}) = \overline{G}(t) + \int_0^t \overline{G}(t-s)dm(s) \\ &\geq \overline{F}(x)\overline{F}(t) + \int_0^t \overline{F}(x)\overline{F}(t-s)dm(s) \\ &= \overline{F}(x)[\overline{F}(t) + \int_0^t \overline{F}(t-s)dm(s)] \\ &= \overline{F}(x).\end{aligned}$$

这就证明了 $X_{N(t)+1}$ 随机大于更新间隔 X_i . 于是我们对 $X_{N(t)+1}$ 的期望也大于对 X_i 的期望, 即 $E[X_{N(t)+1}] \geq E[X_i]$.

$A(t)$, $R(t)$ 和更新间隔的比较

$X_{N(t)+1}$ 随机大于更新间隔

$EA(t)$, $E(R(t))$ 和 $EX_{N(t)+1}$ 的极限

更新过程的汇合

$A(t)$, $R(t)$ 和更新间隔的比较

$X_{N(t)+1}$ 随机大于更新间隔

$EA(t)$, $E(R(t))$ 和 $EX_{N(t)+1}$ 的极限

更新过程的汇合

$A(t)$, $R(t)$ 和更新间隔的比较

$X_{N(t)+1}$ 随机大于更新间隔

$EA(t)$, $E(R(t))$ 和 $EX_{N(t)+1}$ 的极限

更新过程的汇合

下面证明

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E[X_{N(t)+1}] = \frac{E[X^2]}{\mu}.$$

引入符号 $a \vee b = \max(a, b)$, 则 $U = XI[X > x]$ 有生存函数

$$\overline{G}(t) = P(X > x, X > t) = \overline{F}(x \vee t).$$

我们有:

$$\begin{aligned} P(X_{N(t)+1} > x) &= P(t \text{ 时开}) \\ &= \overline{G}(t) + \int_0^t \overline{G}(t-s) dm(s) \\ &= \overline{F}(x \vee t) + \int_0^t \overline{F}(x \vee (t-s)) dm(s). \end{aligned}$$

$A(t)$, $R(t)$ 和更新间隔的比较

$X_{N(t)+1}$ 随机大于更新间隔

$EA(t)$, $E(R(t))$ 和 $EX_{N(t)+1}$ 的极限

更新过程的汇合

引入函数

$$h(t) = \int_0^{\infty} \overline{F}(x \vee t) dx,$$

其为 t 的单调不增非负函数. 我们有

$$\begin{aligned} E[X_{N(t)+1}] &= \int_0^{\infty} P(X_{N(t)+1} > x) dx \\ &= \int_0^{\infty} \overline{F}(x \vee t) dx + \int_0^{\infty} \left(\int_0^t \overline{F}(x \vee (t-s)) dm(s) \right) dx \\ &= h(t) + \int_0^t \left(\int_0^{\infty} \overline{F}(x \vee (t-s)) dx \right) dm(s) \\ &= h(t) + \int_0^t h(t-s) dm(s). \end{aligned}$$

$A(t)$, $R(t)$ 和更新间隔的比较

$X_{N(t)+1}$ 随机大于更新间隔

$EA(t)$, $E(R(t))$ 和 $EX_{N(t)+1}$ 的极限

更新过程的汇合

当 $t \rightarrow \infty$ 时, 用 $\mu = E[X_1] < \infty$ 我们得到

$$\begin{aligned} h(t) &= \int_0^t \bar{F}(t) dx + \int_t^\infty \bar{F}(x) dx \\ &= t\bar{F}(t) + \int_t^\infty \bar{F}(x) dx \\ &\leq \int_t^\infty x dF(x) + \int_t^\infty \bar{F}(x) dx \rightarrow 0. \end{aligned}$$

$A(t)$, $R(t)$ 和更新间隔的比较

$X_{N(t)+1}$ 随机大于更新间隔

$EA(t)$, $E(R(t))$ 和 $EX_{N(t)+1}$ 的极限

更新过程的汇合

如果 X 不是格点的, 利用关键更新定理得到

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t h(t-s) dm(s) &= \frac{1}{\mu} \int_0^\infty h(t) dt \\
 &= \frac{1}{\mu} \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \bar{F}(x \vee t) dx \right) dt \\
 &= \frac{1}{\mu} \left(\int_0^t \bar{F}(t) dx + \int_t^\infty \bar{F}(x) dx \right) dt \\
 &= \frac{1}{\mu} \left[\int_0^\infty t \bar{F}(t) dt + \int_0^\infty \left(\int_0^x \bar{F}(x) dt \right) dx \right] \text{ (交换积分次序)} \\
 &= \frac{1}{\mu} \int_0^\infty 2t \bar{F}(t) dt \\
 &= E[X^2]/\mu.
 \end{aligned}$$

所以当 $\mu < \infty$ 时, $\lim_{t \rightarrow \infty} E[X_{N(t)+1}] = \frac{E[X^2]}{\mu}$.

$A(t)$, $R(t)$ 和更新间隔的比较

$X_{N(t)+1}$ 随机大于更新间隔

$EA(t)$, $E(R(t))$ 和 $EX_{N(t)+1}$ 的极限

更新过程的汇合

定理 3.1

设 $\{X_i\}$ 是更新过程 $\{N(t)\}$ 的更新间隔, $\mu = E[X_1] \in (0, \infty)$. 如果 X_1 不是格点随机变量, 则有以下结论:

- (1) $\lim_{t \rightarrow \infty} E[X_{N(t)+1}] = E[X_1^2]/\mu;$
- (2) $\lim_{t \rightarrow \infty} E[A(t)] = E[X_1^2]/(2\mu);$
- (3) $\lim_{t \rightarrow \infty} E[R(t)] = E[X_1^2]/(2\mu);$
- (4) $\lim_{t \rightarrow \infty} [m(t) - t/\mu + 1] = E[X_1^2]/(2\mu^2).$

在上面的结论中, 如果 $E[X_1^2] = \infty$, 则等式两边都是正无穷.

证明.

可以用证明 (1) 的方法证明 (2) 和 (3). 下面证明 (4), 利用 $R(t) = S_{N(t)+1} - t$ 我们有

$$E[R(t)] = E[S_{N(t)+1}] - t = (m(t) + 1)\mu - t.$$

于是用结论 (3) 我们有

$$m(t) - t/\mu + 1 = E[R(t)]/\mu \rightarrow E[X^2]/(2\mu^2).$$



在更新过程中, 如果更新间隔 X_i 的方差 $\sigma^2 = \text{Var}(X_1) > \mu^2$. 则有

$$\frac{E[X^2]}{2\mu} = \frac{\sigma^2 + \mu^2}{2\mu} > \frac{\mu^2 + \mu^2}{2\mu} = \mu.$$

于是对于充分大的 t , 有

$$E[A(t)] > \mu, \quad E[R(t)] > \mu.$$

也就是说 t 时服役部件的平均年龄或平均剩余寿命, 都有可能大于同类备用部件的平均寿命 μ .

$A(t)$, $R(t)$ 和更新间隔的比较

$X_{N(t)+1}$ 随机大于更新间隔

$EA(t)$, $E(R(t))$ 和 $EX_{N(t)+1}$ 的极限

更新过程的汇合

在工程技术中, **威布尔分布**经常用来描述系统部件的使用寿命. 对 $Y \sim \mathcal{E}(1)$, 和正的常数 α , m , 可以计算出 $X = (\alpha Y)^{1/m}$ 的密度函数

$$f(x) = \frac{m}{\alpha} x^{m-1} e^{-x^m/\alpha}, \quad x \geq 0.$$

这时称 X 服从参数为 m , α 的威布尔分布, 记做 $X \sim W(m, \alpha)$.

例 3.2

如果更新间隔 X 服从参数为 $m = 0.9$, $\alpha = 6$ 的威布尔分布, 则对充分大的 t , $EA(t) > \mu$, $ER(t) > \mu$.

证明.

可以直接计算出,

$$\mu = EX = \alpha^{1/m} \Gamma(1 + \frac{1}{m}),$$

$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = \alpha^{2/m} [\Gamma(1 + \frac{2}{m}) - \Gamma^2(1 + \frac{1}{m})].$$

对于 $m = 0.9$, $\alpha = 6$ 我们可得

$$\mu = 7.7038, \sigma^2 = 73.5228, \frac{EX^2}{2\mu} = 8.6238.$$

 $A(t)$, $R(t)$ 和更新间隔的比较 $X_{N(t)+1}$ 随机大于更新间隔 $EA(t)$, $E(R(t))$ 和 $EX_{N(t)+1}$ 的极限

更新过程的汇合

$A(t)$, $R(t)$ 和更新间隔的比较

$X_{N(t)+1}$ 随机大于更新间隔

$EA(t)$, $E(R(t))$ 和 $EX_{N(t)+1}$ 的极限

更新过程的汇合

$A(t)$, $R(t)$ 和更新间隔的比较

$X_{N(t)+1}$ 随机大于更新间隔

$EA(t)$, $E(R(t))$ 和 $EX_{N(t)+1}$ 的极限

更新过程的汇合

设 N_1 和 N_2 是两个具有相同分布 F , 相互独立的时间间隔为非格点随机变量的更新过程. 记它们的汇合 $\tilde{N}(t) = N_1(t) + N_2(t)$. 注意到一般情况下 $\tilde{N}$ 不是一个更新过程. 实际上, 我们有

定理 4.1

$\tilde{N}$ 是一个更新过程当且仅当 N_1 和 N_2 是泊松过程.

证明.

如果 N_1 和 N_2 是强度为 λ 的泊松过程. 则我们有 $\tilde{N}$ 是强度 2λ 的泊松过程. 反过来, 设 $\tilde{N}$ 是一个更新过程, 记 $\{X_n(1)\}$, $\{X_n(2)\}$ 和 $\{\tilde{X}_n\}$ 分别是过程 N_1 , N_2 和 $\tilde{N}$ 的时间间隔. 显然 $\tilde{X}_1 = \min\{X_1(1), X_1(2)\}$, 于是 $\tilde{X}_1$ 的分布函数 $\tilde{F}$ 满足

$$1 - \tilde{F}(y) = [1 - F(y)]^2.$$

记 $R_1(t)$, $R_2(t)$ 和 $\tilde{R}_t$ 是 N_1 , N_2 和 $\tilde{N}$ 在时刻 t 的剩余寿命. 显然 $\tilde{R}(t) = \min\{R_1(t), R_2(t)\}$, 于是

$$P(\tilde{R}(t) > y) = P(R_1(t) > y)^2.$$

让 $t \rightarrow \infty$ 我们有

$$\frac{1}{\tilde{\mu}} \int_y^\infty [1 - \tilde{F}(x)] dx = \frac{1}{\mu^2} \left(\int_y^\infty [1 - F(x)] dx \right)^2,$$

其中 $\tilde{\mu} = E[\tilde{X}_1]$, $\mu = E[X_1(1)]$.

证明.

对上式关于 y 求导我们有

$$\begin{aligned}\frac{1}{\tilde{\mu}}[1 - \tilde{F}(y)] &= \frac{2}{\mu^2}[1 - F(y)] \int_y^\infty [1 - F(x)] dx \\ &= \frac{1}{\tilde{\mu}}[1 - F(y)]^2.\end{aligned}$$

于是

$$1 - F(y) = \frac{2\tilde{\mu}}{\mu^2} \int_y^\infty [1 - F(x)] dx.$$

解上面的积分方程, 我们有

$$F(y) = 1 - \exp\left(-\frac{2\tilde{\mu}}{\mu^2}y\right).$$

于是 N_1 和 N_2 的时间间隔服从指数分布, 从而 N_1 和 N_2 是泊松过程. □

$A(t)$, $R(t)$ 和更新间隔的比较

$X_{N(t)+1}$ 随机大于更新间隔

$EA(t)$, $E(R(t))$ 和 $EX_{N(t)+1}$ 的极限

更新过程的汇合