泊松过程
更新过程

第 16 讲 习题课

泊松过程
更新过程

泊松过程

更新过程

例 1.1

设 $\{N(t)\}$ 是泊松过程，$EN(t) = \lambda t$，$\{M(t)\}$ 是计数过程. 如果对任何整数 $n \geq 1$ 和 $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$，

$$(M(t_1), M(t_2), \cdots, M(t_n)) \text{ 和 } (N(t_1), N(t_2), \cdots, N(t_n))$$

同分布，验证 $\{M(t)\}$ 是强度为 λ 的泊松过程.

泊松过程
更新过程

证明.

我们验证 $\{M(t)\}$ 满足泊松过程的定义.
首先 $M(0)$ 和 $N(0)$ 具有相同分布所以 $M(0)=0$.
齐次，对于任意正整数 n 以及

$$0 \le t_1 < t_2 < \cdots < t_n,$$

由于 $(M(t_1),\cdots,M(t_n))$ 与 $(N(t_1),\cdots,N(t_n))$ 同分布，所以

$$M(t_0,t_1], M(t_1,t_2], \cdots, M(t_{n-1},t_n]$$

与

$$N(t_0,t_1], N(t_1,t_2], \cdots, N(t_{n-1},t_n]$$

具有相同的联合分布和边缘分布，所以我们有他们相互独立.
由于 $(M(t),M(t+s))$ 与 $(N(t),N(t+s))$ 具有相同的分布，所以 $M(s,t+s]$ 和 $N(s,t+s]$ 具有相同的分布，即参数为 λt 的泊松分布. $\square$

例 1.2

乘客按照强度为 λ 的泊松过程到达车站候车，公交车每隔 5 分钟将后车的乘客全部送走. 为了缩短高峰时刻的乘客候车时间，预备在两次发车时间中加发一班车 (将候车乘客全部运走). 请设计加车的时间使得乘客的平均候车时间最短.

解.

假设加班车的发车时间为 t，第 i 个乘客的到达车站时间为 S_i，所有乘客的候车时间为 $w(t)$，则平均候车时间为：

$$
\begin{aligned}
E[w(t)] &= E[\sum_{i=1}^{N(t)}(t-S_i)+\sum_{i=N(t)+1}^{N(5)}(5-S_i)] \\
&= E[E[\sum_{i=1}^{N(t)}(t-S_i)+\sum_{i=N(t)+1}^{N(5)}(5-S_i)|N(t)]].
\end{aligned}
$$

当 $N(t)=n$ 时，

$$
\sum_{i=1}^{N(t)}(t-S_i)+\sum_{i=N(t)+1}^{N(5)}(5-S_i)=\sum_{i=1}^{n}(t-S_i)+\sum_{n+1}^{N(5)}(5-S_i).
$$

解.

所以

$$E[\sum_{i=1}^{N(t)}(t-S_i)+\sum_{i=N(t)+1}^{N(5)}(5-S_i)|N(t)]=tN(t)+5(N(5)-N(t))-N(5)E[S_i],$$

进而

$$\begin{aligned}E[w(t)]&=tE[N(t)]+5(N(5)-E[N(t)])-N(5)E[S_i]\\&=\lambda t^2+5\lambda(5-t)-5\lambda\frac{5}{2}=\lambda t^2-5\lambda t+12.5\lambda.\end{aligned}$$

当 $t=2.5$ 时，$E[w(t)]$ 取得最小值，即在原来每辆公交车发车后 2.5 分钟加发一辆车，可以使得旅客的平均候车时间最短. □

例 1.3

设 $\{N(t)\}$ 是一个强度函数为 $\lambda(t)$ 的非时齐泊松过程. 对任意 $t \geq 0$, 令 $N^*(t) = N[M^{-1}(t)]$, 则 $\{N^*(t)\}$ 是一个强度为 1 的泊松过程.

泊松过程
更新过程

证明.

由于 $\lambda(t) > 0$，我们知 $m(t)$ 是严格单调递增函数，所以它存在一个严格单调递增的反函数 $m^{-1}(t)$.

我们来验证 $N^*(t) = N[m^{-1}(t)]$ 是一个 Poisson 过程.

(1) $N^*(0) = N(m6{-}1(0) = N(0) = 0$.

(2) 设 $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$，由单调性我们知 $0 = m^{-1}(t_0) < m^{-1}(t_1) < \cdots < m^{-1}(t_n)$. 由 $\{N(t)\}$ 的独立增量性，我们知

$$N(m^{-1}(t_0)), N(m^{-1}(t_0), m^{-1}(t_1)], \cdots, N(m^{-1}(t_{n-1}), m^{-1}(t_n)]$$

相互独立. 于是 $N^*(t_0), N^*(t_1) - N^*(t_0), N^*(t_2) - N^*(t_1), \cdots, N^*(t_n) - N^*(t_{n-1})$ 相互独立.

(3) 对于 $s, t \geq 0$，我们有

$$\begin{aligned} P(N^*(t+s) - N^*(s) = n)P(N(m^{-1}(t+s) - N(m^{-1}(s)) = n) \\ = e^{-m(m^{-1}(t+s))+m(m^{-1}(s))} \frac{[m(m^{-1}(t+s)) - m(m^{-1}(s))]^n}{n!} \\ = \frac{e^{-t}t^n}{n!}. \end{aligned}$$

□

例 2.1

设更新过程 $\{N(t)\}$ 的更新间隔有离散分布 $P(X_n = 1) = P(X_n = 2) = 0.5$，对于 $k = 1, 2, 3$，计算 $p_j = P(N(k) = j)$.

解.

对于 $k=1$，我们有

$$p_0 = P(N(1)=0) = P(X_1=2) = 0.5,\ p_1 = P(N(1)=1) = P(X_1=1) = 0.5.$$

对于 $k=2$，我们有

$$\begin{aligned} p_1 &= P(N(2)=1) = P(X_1=2) + P(X_1=1, X_2=2) \\ &= P(X_1=2) + P(X_1=1)P(X_2=2) = 0.75, \\ p_2 &= P(N(2)=2) = P(X_1=1, X_2=1) = P(X_1=1)P(X_2=1) = 0.25. \end{aligned}$$

对于 $k=3$，我们有

$$\begin{aligned} p_1 &= P(N(3)=1) = P(X_1=2, X_2=2) = 0.25, \\ p_3 &= P(N(3)=3) = P(X_1=1, X_2=1, X_3=1) = 0.125, \\ p_2 &= 1 - p_1 - p_3 = 0.625. \end{aligned}$$

□

泊松过程
更新过程

例 2.2

探险家不幸落入漆黑的溶洞，有两条路供随机选择：沿第一条路探索 2 小时可以走出溶洞，沿第二条路摸索 1 小时返回原地. 回到原地后只能再次进行随机选择. 用 T 表示他走出溶洞所用的时间，试用更新间隔和停时描述 T，并计算他走出溶洞平均需要的时间.

解.

认为他每次走出溶洞完成一次更新然后又走回溶洞，以此往复构成一个更新过程. 引入

$$X_i = \begin{cases} 2, & \text{第 } i \text{ 次走出溶洞}, \\ 1, & \text{第 } i \text{ 次走回}. \end{cases}$$

$N = \inf\{i | X_i = 2\}$ 是 $\{X_i\}$ 的停时，第一个更新间隔是 $T = \sum_{j=1}^{N} X_j$. 于是由瓦尔德定理 $E[T] = E[N]E[X_i] = 2 \times 1.5 = 3$. $\square$

例 2.3

在对更新过程 $\{N(t)\}$ 进行记录时，每个事件都以概率 p 被漏记. 问记录下来的计数过程是否为更新过程？如果是，求更新间隔的分布和原更新间隔分布之间的关系.

泊松过程
更新过程

证明.

由于原过程是更新过程，每个事件被漏记所对应的事件相互独立，也与更新过程独立，同时由下面计算知每次记录的时间间隔服从相同的分布，所以新过程也为更新过程。以 X 表示新的更新过程的时间间隔，则以 N 表示两次更新中漏记的事件数，由全概率公式我们有：

$$
\begin{aligned}
P(X \le t) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(X \le t | N = n) P(N = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} F_{n+1}(t)(1-p)p^n \\
&= (1-p) \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) p^{n-1}.
\end{aligned}
$$

□

例 2.4

设 $T_1, T_2, \cdots$ 独立同分布，都服从二项分布 $B(n,p)$，且与更新过程 $\{N(t)\}$ 独立. 将 $\{N(t)\}$ 的第 i 个更新间隔扩大 T_i 倍后，是否能得到新的更新过程？如果是，计算新的更新间隔的分布函数.

泊松过程
更新过程

证明.

新的计数过程的时间间隔为 $Y_i = X_i T_i$. 注意到 $\{T_i\}$ 相互独立，$\{X_i\}$ 也相互独立，且 $\{T_i\}$ 与 $\{X_i\}$ 独立，故 $\{X_i T_i\}$ 也相互独立。下面我们证明 Y_i 具有相同的分布，从而得到的过程为更新过程.

我们有

$$
\begin{aligned}
P(T_i X_i \le x) &= \sum_{k=0}^{n} P(T_i X_i \le x | T_i = k) P(T_i = k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} P(k X_i \le x) \binom{n}{k} p^k q^{n-k} + q^n \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} F(x/k) + q^n.
\end{aligned}
$$

从而我们知得到的过程为更新过程，且更新间隔的分布函数如上. □

例 2.5

设更新过程 $(N(t): t \geq 0)$ 的更新间隔时间序列 $\{X_n\}$ 取正整数值. 记 $A_n = \{$在时刻 n 发生更新$\}$. 证明: 如果极限 $a := \lim_{n\to\infty} P(A_n)$ 存在, 则有 $a = 1/E(X_1)$.

证明.

注意到时刻 n 为止的更新次数为 $N(n) = \sum_{k=1}^{n} 1_{A_k}$. 因此,

$$m(n) = E[N(n)] = \sum_{k=1}^{n} P(A_k).$$

由于极限 $a := \lim_{n\to\infty} P(A_n)$ 存在，我们知 $m(n)/a \to a$. 由基本更新定理 $m(n)/n \to 1/E(\xi_1)$，所以 $a = 1/E(\xi_1)$. $\square$

例 2.6

设 $\{N(t) : t \geq 0\}$ 是一个更新过程，已知其更新函数 $m(t) = E[N(t)]$. 求 $g(t) := E[N(t)^2]$.

解.

令 S_1 是第一次更新的时间，则

$$g(t) = E[E[N(t)^2|S_1]] = \int_0^t E[N(t)^2|S_1 = x]dF(x).$$

注意到

$$\begin{aligned} E[N(t)^2|S_1 = x] &= E[(N(x,t] + N(x))^2|S_1 = x) \\ &= E[(N(x,t] + 1)^2|S_1 = x] \\ &= E[(N(t-x) + 1)^2], \end{aligned}$$

我们有

$$g(t) = F(t) + 2\int_0^t m(t-x)dF(x) + \int_0^t g(t-x)dF(x).$$

泊松过程
更新过程

解.

又注意到

$$\int_0^t m(t-x)dF(x) = m * F(t) = m(t) - F(t),$$

于是我们知 g 是如下更新方程的解:

$$g(t) = 2m(t) - F(t) + \int_0^t g(t-x)dF(x).$$

于是我们有

$$\begin{aligned} g(t) &= 2m(t) - F(t) + [2m - F] * m(t) \\ &= m(t) + 2m * m(t). \end{aligned}$$

□