

第 17 讲 马尔可夫链

马氏链

马氏链的基本性质

柯尔莫哥洛夫-切普曼方程

初始分布和 X_n 的分布

状态的互通性

常返与非常返态

马氏链

马氏链的基本性质

柯尔莫哥洛夫-切普曼方程

初始分布和 X_n 的分布

状态的互通性

常返与非常返态

马氏链

马氏链的基本性质

柯尔莫哥洛夫-切普曼方程

初始分布和 X_n 的分布

状态的互通性

常返与非常返态

定义 1.1

设 $\{X_n\}$ 是一个在 I 中取值的随机序列, 如果对任意正整数 n 和 $i, j, i_0, i_1, \dots, i_{n-1} \in I$, 有

$$\begin{aligned} & P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) \\ &= P(X_{n+1} = j | X_n = i) \\ &= P(X_i = j | X_0 = i), \quad i, j \in I, \end{aligned}$$

则称 $\{X_n\}$ 为时齐的马尔可夫链, 简称为马氏链. 这时称

$$p_{ij} = P(X_1 = j | X_0 = i), \quad i, j \in I$$

为马氏链 $\{X_n\}$ 的转移概率, 称矩阵

$$P = (p_{ij}) = (p_{ij})_{i,j \in I}$$

为马氏链 $\{X_n\}$ 的一步转移概率矩阵, 简称为转移矩阵.

马氏链

马氏链的基本性质

柯尔莫哥洛夫-切普曼方程

初始分布和 X_n 的分布

状态的互通性

常返与非常返态

由于 $\{X_1 = j\} (j \in I)$ 是完备事件组, 所以有

$$\sum_{j \in I} p_{ij} = \sum_{j \in I} P(X_1 = j | X_0 = i) = P\left(\bigcup_{j \in I} \{X_1 = j\} | X_0 = i\right) = 1.$$

于是转移矩阵 P 的各行之和等于 1, 这样的矩阵也被称为随机矩阵.

马氏链

马氏链的基本性质

柯尔莫哥洛夫-切普曼方程

初始分布和 X_n 的分布

状态的互通性

常返与非常返态

马氏链

马氏链的基本性质

柯尔莫哥洛夫-切普
曼方程

初始分布和 X_n 的
分布

状态的互通性

常返与非常返态

对于马氏链的直观理解是：已知现在的状态，将来与过去相独立. 人们习惯地称这种性质为 马氏性.

定理 2.1

对于事件 A, B, C , 当 $P(AB) > 0$, 条件

$$P(C|BA) = P(C|B)$$

与条件

$$P(AC|B) = P(A|B)P(C|B)$$

等价.

证明.

引入条件概率 $P_B(\cdot) = P(\cdot|B)$, 我们知上面两个等式分别等价于 $P_B(C|A) = P_B(C)$ 和 $P_B(AC) = P_B(A)P_B(C)$. 这两个公式都表示对于概率 P_B 来说, A 和 C 独立, 所以它们等价. $\square$

根据上述定理, $P(C|BA) = P(C|B)$ 等价于已知 B 发生时, C 和 A 独立. 于是, $\{X_n\}$ 有马氏性的充分必要条件是对于任意 $n \geq 1$, 已知现在 $B = \{X_n = i\}$, 将来 $C = \{X_{n+1} = j\}$ 与过去 $A = \{X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0\}$ 独立.

例 2.2: 两状态马尔可夫链

状态空间为 $\{0, 1\}$, 转移概率为 $p_{01} = 1 - p_{00} = p$, $p_{10} = 1 - p_{11} = q$. 转移矩阵可以表示如下:

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix} \end{matrix}$$

该马尔可夫链可以用来作为一个描述电话状态的简单模型, 其中 $X_n = 0$ 表明电话在时刻 n 空闲, $X_n = 1$ 表明电话在时刻 n 繁忙. 我们假设在每个时间间隔内有一个电话打进的概率为 p (为了方便起见, 假定在任意一个特定时间的的时间间隔内至多有一个电话打进). 当电话繁忙时, 来到的呼叫无法进入系统. 我们还假设前一段时间间隔内忙的电话在下一时间间隔内空闲的概率为 q .

马氏链

马氏链的基本性质

柯尔莫哥洛夫-切普曼方程

初始分布和 X_n 的分布

状态的互通性

常返与非常返态

例 2.3

设想一个质点在直线的整数点上作简单随机游动：质点一旦到达某状态后，下次向右移动一步的概率是 p ，向左移动一步的概率是 $q = 1 - p$ ， $pq > 0$ 。现在用 X_0 表示质点的初始状态，用 X_n 表示质点在时刻 n 的状态，则 $\{X_n\}$ 是马氏链，并且

$$\begin{cases} p_{i,i-1} = P(X_{n+1} = i-1 | X_n = i) = q, \\ p_{i,i+1} = P(X_{n+1} = i+1 | X_n = i) = p. \end{cases}$$

例 2.4: 两端是吸收壁的简单随机游动

设质点在状态 $\{1, 2, \dots, n-1\}$ 中按上例的规律做简单随机游动, 但是质点一旦到达状态 n 或状态 0 后将永远停留在 n 或 0 . 用 X_0 表示质点的初始状态, 用 X_n 表示质点在时刻 n 的状态, 则 $\{X_n\}$ 是马氏链, 并且

$$p_{ij} = \begin{cases} q, & 1 \leq i \leq n-1, j = i-1, \\ p, & 1 \leq i \leq n-1, j = i+1, \\ 1, & (i, j) = (0, 0) \text{ 或 } (i, j) = (n, n), \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

相应的转移概率矩阵是

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

马氏链

马氏链的基本性质

柯尔莫哥洛夫-切普曼方程

初始分布和 X_n 的分布

状态的互通性

常返与非常返态

例 2.5: 两端是反射壁的简单随机游动

设质点在状态 $\{1, 2, \dots, n-1\}$ 中按上例的规律做简单随机游动, 但是质点到达状态 n 后下一步一定返回 $n-1$, 到达状态 0 后下一步一定返回状态 1 . 用 X_0 表示质点的初始状态, 用 X_n 表示质点在时刻 n 的状态, 则 $\{X_n\}$ 是马氏链, 并且

$$p_{ij} = \begin{cases} q, & 1 \leq i \leq n-1, j = i-1, \\ p, & 1 \leq i \leq n-1, j = i+1, \\ 1, & (i, j) = (0, 1) \text{ 或 } (i, j) = (n, n-1), \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

相应的转移概率矩阵是

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

马氏链

马氏链的基本性质

柯尔莫哥洛夫-切普曼方程

初始分布和 X_n 的分布

状态的互通性

常返与非常返态

下面的定理提供了一个非常有用的获得马尔可夫链的方法，并可用于检验一随机过程是否为马尔可夫链.

定理 2.6

设随机过程 $\{X_n : n \geq 0\}$ 满足:

- (1) $X_n = f(X_{n-1}, \xi_n) (n \geq 1)$, 其中 $f : S \times S \rightarrow S$, 且 ξ_n 取值在 S 上,
- (2) $\{\xi_n : n \geq 1\}$ 为独立同分布随机变量, 且 X_0 与 $\{\xi_n : n \geq 1\}$ 也相互独立,

则 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是马尔可夫链, 而且其一步转移概率为

$$p_{ij} = P(f(i, \xi_1) = j).$$

马氏链

马氏链的基本性质

柯尔莫哥洛夫-切普曼方程

初始分布和 X_n 的分布

状态的互通性

常返与非常返态

证明.

设 $n \geq 1$, 注意到 ξ_{n+1} 与 $X_0, X_1, \dots, X_n$ 相互独立 (这是因为 X_i 是 $X_0, \xi_1, \dots, \xi_i$ 的函数), 有

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = i_{n+1} | X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) &= P(f(X_n, \xi_{n+1}) = i_{n+1} | X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) \\ &= P(f(i_n, \xi_{n+1}) = i_{n+1} | X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) \\ &= P(f(i_n, \xi_{n+1}) = i_{n+1}). \end{aligned}$$

同样地,

$$P(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n) = P(f(X_n, \xi_{n+1}) = i_{n+1}).$$

因此

$$P(X_{n+1} = i_{n+1} | X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) = P(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n).$$

从而 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是马尔可夫链, 且其转移概率为 $p_{ij} = P(f(i, \xi_1) = j)$. □

为了方便地研究马氏链的性质, 有必要回忆条件概率的基本公式. 设 $P(AB) > 0$, 则

$$P_A(C|B) = P(C|BA).$$

如果 $P(A) > 0$, 事件 B_k 互不相容使得 $C \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$, 则有全概率公式

$$P(C|A) = \sum_{k=1}^{\infty} P(B_k|A)P(C|B_kA).$$

定理 2.7

设 I 是马氏链 $\{X_n\}$ 的状态空间, $A, A_j \subset I$, 则有

- (1) 已知 $X_n = i$ 的条件下, 将来 $\{X_m; m \geq n+1\}$ 与过去 $\{X_j; j \leq n-1\}$ 独立;
- (2) $P(X_{n+k} = j | X_n = i) = P(X_k = j | X_0 = i)$;
- (3) $P(X_{n+k} = j | X_n = i, X_{n-1} \in A_{n-1}, \dots, X_0 \in A_0) = P(X_k = j | X_0 = i)$;
- (4) $P(X_{n+k} \in A | X_n = i, X_{n-1} \in A_{n-1}, \dots, X_0 \in A_0) = P(X_k \in A | X_0 = i)$.

证明.

对于任何 $m > n \geq 1$ 和 I 中的 $i_0, i_1, \dots, i_m$, 引入 $B_k = \{X_k = i_k\}$, $k = 0, 1, \dots, m$, 则有

$$\begin{aligned} A &:= \{X_m = i_m, X_{m-1} = i_{m-1}, \dots, X_{n+1} = i_{n+1}\} \\ &= B_m B_{m-1} \cdots B_{n+1}, \\ C &:= \{X_{n-1} = i_{n-1}, X_{n-2} = i_{n-2}, \dots, X_0 = i_0\} \\ &= B_{n-1} B_{n-2} \cdots B_0, \end{aligned}$$

下面证明已知现在 $B = \{X_n = i_n\} = B_n$ 后, 将来 A 与过去 C 独立. 用乘法公式和马氏性得到

$$\begin{aligned} P(ABC) &= P(B_0 B_1 \cdots B_m) \\ &= P(B_0) P(B_1 | B_0) P(B_2 | B_1) \cdots P(B_m | B_{m-1}) \\ &= P(B_m | B_{m-1}) P(B_{m-1} | B_{m-2}) \cdots P(B_1 | B_0) P(B_0). \end{aligned}$$

马氏链

马氏链的基本性质

柯尔莫哥洛夫-切普曼方程

初始分布和 X_n 的分布

状态的互通性

常返与非常返态

证明.

同理有

$$P(BC) = P(B_0 B_1 \cdots B_n) = P(B_n | B_{n-1}) P(B_{n-1} | B_{n-2}) \cdots P(B_1 | B_0) P(B_0).$$

对 $k > n$ 注意使用 $P(B_{k+1} | B_k) = P(B_{k+1} | B_k B_{k-1} \cdots B_n)$ 就得到

$$\begin{aligned} P(A|BC) &= \frac{P(ABC)}{P(BC)} \\ &= P(B_n | B_{m-1} \cdots B_n) P(B_{m-1} | B_{m-2} \cdots B_n) \cdots P(B_{n+1} | B_n) \\ &= P(B_m B_{m-1} \cdots B_{n+1} | B_n) = P(A|B). \end{aligned}$$

从而 (1) 成立. □

证明.

下面我们用归纳法来证明 (2). 由马氏链的定义我们知对 $k = 1$ 以及任意 n 结论成立. 设结论对 $k - 1$ 以及任意 n 成立, 用 (1) 中的结论以及全概率公式我们有

$$\begin{aligned} P(X_{n+k} = j | X_n = i) &= \sum_{l \in I} P(X_{n+k} = j | X_{n+k-1} = l, X_n = i) P(X_{n+k-1} = l | X_n = i) \\ &= \sum_{l \in I} P(X_k = j | X_{k-1} = l, X_0 = i) P(X_{k-1} = l | X_0 = i) \\ &= P(X_k = j | X_0 = i). \end{aligned}$$

由 (1) 和 (2) 我们可得 (3) 和 (4). □

马氏链

马氏链的基本性质

柯尔莫哥洛夫-切普曼方程

初始分布和 X_n 的分布

状态的互通性

常返与非常返态

马氏链

马氏链的基本性质

柯尔莫哥洛夫-切普
曼方程

初始分布和 X_n 的
分布

状态的互通性

常返与非常返态

对于马氏链 $\{X_n\}$, 我们知道 $P(X_{k+n} = j | X_n = i)$ 和 n 无关, 所以对 $i, j \in I$ 定义

$$P_{ij}^{(0)} = P(X_0 = j | X_0 = i) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

$$P_{ij}^{(k)} = P(X_{n+k} = j | X_n = i) = P(X_k = j | X_0 = i),$$

并且称 $p_{ij}^{(k)}$ 为 $\{X_n\}$ 的 k 步转移概率, 称矩阵

$$p^{(k)} = (p_{ij}^{(k)})$$

为 $\{X_n\}$ 的 k 步转移概率矩阵, 简称为 k 步转移矩阵. 这时,

$$P^{(1)} = P, \quad P^{(0)} = \text{单位阵}.$$

下面的柯尔莫哥洛夫-切普曼 (Kolmogorov-Chapman) 方程 (简称 K-C 方程) 告诉我们从一部转移概率矩阵 P 计算 k 步转移概率矩阵 $P^{(k)}$ 的方法.

定理 3.1: (K-C 方程)

对任意 $m, n \geq 0$, 有

$$\begin{cases} p_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k \in I} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)}, \\ P^{(n+m)} = P^n P^m. \end{cases} \quad (3.1)$$

证明.

由定理 2.7 我们有

$$\begin{aligned}
 p_{ij}^{(n+m)} &= P(X_{n+m} = j | X_0 = i) \\
 &= \sum_{k \in I} P(X_n = k | X_0 = i) P(X_{n+m} = j | X_n = k, X_0 = i) \\
 &= \sum_{k \in I} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)}.
 \end{aligned}$$

写成矩阵的形式, 我们得到 $P^{(n+m)} = P^{(n)} P^{(m)}$. 由 n, m 的任意性得到

$$P^{(n+m)} = P P^{(n+m-1)} = P^2 P^{(n+m-2)} = \dots = P^{n+m}.$$



推论 3.2

对于正整数 $n, m, k, n_1, n_2, \dots, n_k$ 和状态 i, j, l 总有

$$(1) \quad p_{ij}^{(n+m)} \geq p_{il}^{(n)} p_{lj}^{(m)};$$

$$(2) \quad p_{ii}^{(n+k+m)} \geq p_{ij}^{(n)} p_{jl}^{(k)} p_{li}^{(m)};$$

$$(3) \quad p_{ii}^{(n_1+n_2+\dots+n_k)} \geq p_{ii}^{(n_1)} p_{ii}^{(n_2)} \dots p_{ii}^{(n_k)};$$

$$(4) \quad p_{ii}^{(nk)} \geq (p_{ii}^{(n)})^k.$$

证明.

利用 K-C 方程我们有

$$p_{ij}^{(n+m)} = \sum_{s \in I} p_{is}^{(n)} p_{sj}^{(m)} \geq p_{il}^{(n)} p_{lj}^{(m)},$$

从而 (1) 得证. 两次利用 (1) 我们有

$$p_{ii}^{(n+k+m)} \geq p_{il}^{(n+k)} p_{li}^{(m)} \geq p_{ij}^{(n)} p_{jl}^{(k)} p_{li}^{(m)},$$

于是 (2) 成立. 在 (1) 中取 $j = i$ 并应用归纳法我们可以得到 (3). 在 (3) 中取 $n_i = n$ 我们就得到 (4). □

例 3.3

考虑两状态的马尔可夫链所描述的电话状态模型, 假定电话在时刻 0 时空闲. 设 $p = \frac{1}{4}$, $q = \frac{1}{6}$, 令 $n = 6$, 则

$$\mathbf{P}^6 = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}^6 = \begin{pmatrix} 0.424 & 0.576 \\ 0.384 & 0.616 \end{pmatrix}.$$

如果电话在 0 时刻空闲, 想要知道在此条件下, 电话在时刻 6 繁忙的概率, 我们可以计算

$$p_{01}^{(6)} = 0.576$$

即可.

马氏链

马氏链的基本性质

柯尔莫哥洛夫-切普曼方程

初始分布和 X_n 的分布

状态的互通性

常返与非常返态

马氏链

马氏链的基本性质

柯尔莫哥洛夫-切普曼方程

初始分布和 X_n 的分布

状态的互通性

常返与非常返态

设 $\{X_n\}$ 的一步转移概率矩阵是 P , X_0 有概率分布

$$\pi_j = P(X_0 = j), j \in I.$$

称 X_0 的分布列 (认为 $I = \{1, 2, \dots\}$)

$$\pi^{(0)} = [\pi_1, \pi_2, \dots]$$

为 $\{X_n\}$ 的初始分布, 它表明了质点在初始状态的分布情况. 再引入 X_n 的概率分布

$$\pi_j^{(n)} = P(X_n = j), j \in I$$

和

$$\pi^{(n)} = [\pi_1^{(n)}, \pi_2^{(n)}, \dots],$$

则 $\pi^{(n)}$ 表明质点在 n 时刻所处状态的分布.

马氏链

马氏链的基本性质

柯尔莫哥洛夫-切普曼方程

初始分布和 X_n 的分布

状态的互通性

常返与非常返态

定理 4.1

设马氏链 $\{X_n\}$ 有初始分布 $\pi^{(0)} = [\pi_1, \pi_2, \dots]$ 和转移概率矩阵 $P = (p_{ij})$.

(1) 对于 $n_0 < n_1 < \dots < n_m$, 有

$$\begin{aligned} & P(X_{n_0} = i_0, X_{n_1} = i_1, \dots, X_{n_m} = i_m) \\ &= \pi_{i_0}^{(n_0)} p_{i_0 i_1}^{(n_1 - n_0)} p_{i_1 i_2}^{(n_2 - n_1)} \dots p_{i_{m-1} i_m}^{(n_m - n_{m-1})}; \end{aligned}$$

(2) 对 $n \geq 1$, 有

$$\begin{cases} \pi_j^{(n)} = \sum_{i \in I} \pi_i p_{ij}^{(n)}, \\ \pi^{(n)} = \pi^{(k)} P^{(n-k)}, \quad 0 \leq k \leq n. \end{cases}$$

证明.

(1) 利用概率的乘法公式我们有

$$\begin{aligned} & P(X_{n_0} = i_0, X_{n_1} = i_1, \dots, X_{n_m} = i_m) \\ &= P(X_{n_0} = i_0)P(X_{n_1} = i_1 | X_{n_0} = i_0) \cdots P(X_{n_m} = i_m | X_{n_{m-1}} = i_{m-1}) \\ &= \pi_{i_0}^{n_0} p_{i_0 i_1}^{(n_1 - n_0)} p_{i_1 i_2}^{(n_2 - n_1)} \cdots p_{i_{m-1} i_m}^{(n_m - n_{m-1})}. \end{aligned}$$

(2) 用全概率公式我们可以得到, 当 $n \geq 1$ 时,

$$\begin{aligned} \pi_j^{(n)} &= P(X_n = j) \\ &= \sum_{i \in I} P(X_0 = i)P(X_n = j | X_0 = i) \\ &= \sum_{i \in I} \pi_i p_{ij}^{(n)}. \end{aligned}$$

写成矩阵的形式就得到

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\pi}^{(n)} &= \boldsymbol{\pi}^{(0)} P^{(n)} = [\boldsymbol{\pi}^{(0)} P^{(1)}] P^{(n-1)} \\ &= \boldsymbol{\pi}^{(1)} P^{(n-1)} = \cdots = \boldsymbol{\pi}^{(k)} P^{(n-k)}. \end{aligned}$$

□

马氏链

马氏链的基本性质

柯尔莫哥洛夫-切普曼方程

初始分布和 X_n 的分布

状态的互通性

常返与非常返态

极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)}$ 表示质点从 X_0 出发后, 在充分远的将来处于状态 j 的概率.

考虑直线上的简单随机游动. 如果 $p > q$, 无论质点从哪里出发, 随着时间的推移向右越跑越远. 直观上应该有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = 0.$$

再考虑两端带有吸收壁的简单随机游动. 状态 $0, n$ 和 $\{1, \dots, n-1\}$ 中的状态有明显的不同. 直观上质点不可能永远在 $\{1, \dots, n-1\}$ 中转移, 所以有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n-1.$$

马氏链

马氏链的基本性质

柯尔莫哥洛夫-切普曼方程

初始分布和 X_n 的分布

状态的互通性

常返与非常返态

马氏链

马氏链的基本性质

柯尔莫哥洛夫-切普曼方程

初始分布和 X_n 的分布

状态的互通性

常返与非常返态

定义 5.1

设 I 是马氏链 $\{X_n\}$ 的状态空间. $i, j \in I$ 是其中的两个状态.

- (1) 如果 $p_{ii} = 1$, 则称 i 是吸引状态;
- (2) 如果存在 $n \geq 1$ 使得 $p_{ij}^{(n)} > 0$, 则称 i 通 j , 记做 $i \rightarrow j$;
- (3) 如果 $i \rightarrow j$ 且 $j \rightarrow i$, 则称 i, j 互通, 记做 $i \leftrightarrow j$.

$i \rightarrow j$ 表示质点从 i 出发以正概率到达 j . i, j 互通表明质点从 i 到 j 后, 以正概率回到 i , 反之亦然.

例 5.2

对于两端是吸收壁的简单随机游动, 状态 0 和 n 都是吸引状态.

命题 5.3

设 I 是马氏链 $\{x_n\}$ 的状态空间. $i, j \in I$ 是其中的两个状态. 则 $i \rightarrow j$ 当且仅当

$$P_i(\text{存在 } n \geq 0 \text{ 使得 } X_n = j) > 0.$$

证明.
注意到

$$p_{ij}^{(n)} \leq P_i(\text{存在 } n \geq 0 \text{ 使得 } X_n = j) \leq \sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)},$$

可知上面两个条件等价.



命题 5.4

如果 $i \leftrightarrow j$, 那么 $j \leftrightarrow i$.

马氏链

马氏链的基本性质

柯尔莫哥洛夫-切普
曼方程

初始分布和 X_n 的
分布

状态的互通性

常返与非常返态

命题 5.5

如果 $i \rightarrow j$ 且 $j \rightarrow k$, 则 $i \rightarrow k$.

证明.

如果 $i \rightarrow j$ 且 $j \rightarrow k$, 则存在 n, m 使得 $p_{ij}^{(n)} p_{jk}^{(m)} > 0$, 用推论 3.2 我们有

$$p_{ik}^{(n+m)} \geq p_{ij}^{(n)} p_{jk}^{(m)} > 0,$$

于是 $i \rightarrow k$.



对于马氏链 $\{X_n\}$, 引入条件概率

$$f_{ij}^{(1)} = P(X_1 = j | X_0 = i),$$

$$f_{ij}^{(n)} = P(X_n = j, X_k \neq j; 1 \leq k \leq n-1 | X_0 = i), \quad n \geq 1.$$

$f_{ij}^{(n)}$ 是质点从 i 出发的条件下, 第 n 步首次到达 j 的概率, 称为从 i 出发后第 n 步首达 j 的概率, 简称为首达概率.

由于对不同的 n , 事件

$$A_1 = \{X_1 = j\}, A_n = \{X_n = j, X_k \neq j, 1 \leq k \leq n-1\} \quad (6.1)$$

互不相容, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 发生表示质点到达过状态 j , 所以

$$f_{ij}^* := P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n | X_0 = i\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n | X_0 = i) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} \leq 1.$$

f_{ij}^* 是质点从 i 出发的条件下到达过 j 的概率, 简称从 i 出发后到达 j 的概率.

定义 6.1

如果 $f_{ii}^* = 1$, 则称 i 是常返状态. 如果 $f_{ii}^* < 1$, 则称 i 是非常返态.

按照定义, 吸引状态满足 $f_{ii}^* = f_{ii}^{(1)} = 1$, 因而是常返状态. 当 i 是常返状态时, 质点从 i 出发后, 在实际中必然回到 i , 再从 i 出发, 再回到 i , 因而回到 i 无穷次. i 是非常返态表明质点从 i 出发后, 以正概率不能回到 i , 因而只能回到 i 有限次, 然后永远离开状态 i .

马氏链

马氏链的基本性质

柯尔莫哥洛夫-切普
曼方程

初始分布和 X_n 的
分布

状态的互通性

常返与非常返态

定理 6.2

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^n f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}.$$

证明.

设 A_n 由 (6.1) 定义, 则 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 互不相容. $\bigcup_{k=1}^n A_k$ 表示前 n 次转移中到达过 j , 所以 $\{X_n = j\} \subset \bigcup_{k=1}^n A_k$. 于是应用全概率公式, 我们有:

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(n)} &= P(X_n = j | X_0 = i) \\ &= \sum_{k=1}^n P(A_k | X_0 = i) P(X_n = j | A_k, X_0 = i) \\ &= \sum_{k=1}^n f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}. \end{aligned}$$

□

定理 6.3

对于马氏链 $\{X_n\}$ 以及 $\{p_{ii}^{(n)}\}$, $f_{ii}^{(n)}$, 有以下结果:

- (1) $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \frac{1}{(1-f_{ii}^*)}$;
- (2) i 是常返状态的充分必要条件是 $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$;
- (3) 如果 i 是常返状态, $i \rightarrow j$, 则 $i \leftrightarrow j$, 并且 j 也是常返的.

引理 6.4

(1) 如果 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ 收敛, 则

$$\lim_{s \rightarrow 1-} \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = a.$$

(2) 如果 $a_k \geq 0$ 且 $\lim_{s \rightarrow 1-} \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k = a \leq \infty$, 则

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k = a.$$

证明.

在定理 6.2 中取 $j = i$, 两边再同时乘以 ρ^n , 对 $n \geq 1$ 我们有

$$\rho_{ii}^{(n)} \rho^n = \sum_{k=1}^n f_{ii}^{(k)} \rho^k p_{ii}^{(n-k)} \rho^{n-k}, \quad \rho \in (0, 1).$$

上式两边对 n 求和得到

$$\begin{aligned} G(\rho) &= \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} \rho^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} \rho^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n f_{ii}^{(k)} \rho^k p_{ii}^{(n-k)} \rho^{n-k} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} f_{ii}^{(k)} \rho^k p_{ii}^{(n-k)} \rho^{n-k} \\ &= 1 + \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_{ii}^{(k)} \rho^k \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} \rho^n \right) \\ &= 1 + F(\rho) G(\rho), \end{aligned}$$

马氏链

马氏链的基本性质

柯尔莫哥洛夫-切普曼方程

初始分布和 X_n 的分布

状态的互通性

常返与非常返态

证明.

其中 $F(\rho) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{ii}^{(k)} \rho^k$. 于是得到

$$G(\rho) = 1/[1 - F(\rho)].$$

令 $\rho \rightarrow 1-$ 就得到结论 (1).

结论 (2) 是结论 (1) 的直接推论.

下面证明结论 (3). 首先我们证明 $i \leftrightarrow j$. 因为 $i \rightarrow j$, 可见自 i 出发, 最终要到达 j , 而且中间不经过 i 的概率应大于 0; 因此, 必存在 $N(>0)$, 使自 i 出发, 于第 N 步初次到达 j , 而且中间不经过 i 的概率 $f_{i,ij}^{(N)} > 0$. 下面我们证明 $f_{ji}^* = 1$, 于是 $j \rightarrow i$. 若 $f_{ji}^* < 1$, 则自 i 出发, 不回到 i 的概率至少为 $f_{i,ij}^{(N)}(1 - f_{ji}^*) > 0$, 此与 i 为常返的假设矛盾.

马氏链

马氏链的基本性质

柯尔莫哥洛夫-切普曼方程

初始分布和 X_n 的分布

状态的互通性

常返与非常返态

证明.

再证明 j 是常返的. 设 n, m 使得 $p_{ji}^{(m)} p_{ij}^{(n)} > 0$. 对于任意 $k \geq 1$, 我们有

$$p_{jj}^{(m+k+n)} \geq p_{ji}^{(m)} p_{ii}^{(k)} p_{ij}^{(n)}.$$

两边对 k 求和我们有

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_{jj}^{(m+k+n)} \geq p_{ji}^{(m)} p_{ij}^{(n)} \sum_{k=1}^{\infty} p_{ii}^{(k)} = \infty,$$

由 (2) 知道 j 是常返的. □