第 9 讲 停时

在上一讲中已经证明了结论

$$\lim_{t\to\infty}\frac{N(t)}{t}=\frac{1}{\mu}\ a.s..$$

由于 $m(t)=E[N(t)]$，所以自然想到有

$$\lim_{t\to\infty}\frac{m(t)}{t}=\lim_{t\to\infty}\frac{E[N(t)]}{t}=\frac{1}{\mu}.$$

本讲我们的主要目标就是在数学上严格证明上式.

定义 1.1

设 $\{Y_n\}$ 是随机序列，T 是取正整数值的随机变量，如果对任何正整数 n，随机事件 $\{T \leq n\}$ 由 $(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$ 唯一决定，则称 T 是 $\{Y_n\}$ 的停时.

由于

$$\{T = n\} = \{T \le n\} - \{T \le n-1\},$$

$$\{T > n\} = \Omega - \{T \le n\}.$$

所以，只要 T 是 $\{Y_n\}$ 的停时，则 $\{T = n\}$ 和 $\{T > n\}$ 都可以由 $(Y_1, \cdots, Y_n)$ 唯一决定.

例 1.2

假设 $X_1, X_2, \cdots$ 是独立同分布的随机变量序列，满足

$$P(X_i = 1) = p = 1 - P(X_i = 0)$$

其中 $p > 0$. 若我们定义

$$N = \inf\{X_1 + \cdots + X_n = r\},$$

其中我们记 $\inf \emptyset = +\infty$，则 N 是 $\{X_n\}$ 的停时.

定理 1.3

当随机变量 X 只取非负整数值时，有

$$E[X]=\sum_{k=1}^{\infty}P(X\geq k)=\sum_{k=0}^{\infty}P(X>k).$$

定理 1.4: 瓦尔德定理

设随机变量 $Y_1, Y_2, \cdots$ 有相同的数学期望 μ，$\max_{1\le j\le\infty} E[|Y_j|] \le M$，$T$ 是取非负整数值的随机变量，$E[T] < \infty$，定义

$$S_T = \sum_{j=1}^{T} Y_j.$$

(1) 如果对于任何 j，$\{T \le j\}$ 和 Y_{j+1} 独立，则 $E[S_T] = \mu E[T]$；

(2) 如果 $\{Y_n\}$ 相互独立，T 是 $\{Y_n\}$ 的停时，则 $E[S_T] = \mu E[T]$.

证明.

(1) 先设 $\{Y_j\}$ 是非负的随机序列. 用 $I[T \geq j]$ 表示事件 $\{T \geq j\}$ 的示性函数，则 $I[T \geq j] = 1 - I[T \leq j-1]$ 与 Y_j 独立，且

$$S_T = \sum_{j=1}^{T} Y_j = \sum_{j=1}^{T} Y_j I[T \geq j] = \sum_{j=1}^{\infty} Y_j I[T \geq j].$$

在上式两边求数学期望，利用单调收敛定理和定理 1.3，以及 $I[T \geq j]$ 与 Y_j 的独立性，我们有

$$E[S_T] = \sum_{j=1}^{\infty} E[Y_j] E[I[T \geq j]] \leq \sum_{j=1}^{\infty} M P(T \geq j) = M E[T] < \infty.$$

证明.

对于一般的 $\{Y_j\}$，引入非负随机变量

$$Y_j^+ = (|Y_j| + Y_j)/2, Y_j^- = (|Y_j| - Y_j)/2,$$

则 $Y_j = Y_j^+ - Y_j^-$，我们有

$$S_T = \sum_{j=1}^{\infty} Y_j^+ I[T \geq j] = \sum_{j=1}^{\infty} Y_j^- I[T \geq j].$$

因为 $I[T \geq j]$ 与 Y_j^+, Y_j^- 分别独立，$E[Y_j^+] + E[Y_j^-] = E[|Y_j|] \leq M$，所以上面两个求和项的数学期望都有限.

证明.

于是

$$
\begin{aligned}
E[S_T] &= \sum_{j=1}^{\infty} E[Y_j^+]P(T \geq j) - \sum_{j=1}^{\infty} E[Y_j^-]P(T \geq j) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} E[Y_j^+ - Y_j^-]P(T \geq j) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \mu P(T \geq j) \\
&= \mu E[T].
\end{aligned}
$$

(2) 由停时的定义和 (1) 直接可得. □

例 1.5

一副 52 张的扑克牌进行了洗牌，而后每次将一张牌翻开正面朝上. 对于 $i = 1, 2, \cdots, 52$，定义 X_i 为 1，如果第 i 张翻开的牌是 A，否则定义为 0. 同时记 N 为直到四个 A 全出现时所翻开的牌数. 问方程

$$E[\sum_{i=1}^{N} X_i] = E[N]E[X_i]$$

是否成立？如果不成立的话，为什么我们不能应用瓦尔德定理？

命题 2.1

用 $S_{N(t)+1}$ 表示 t 以后的第一个更新时刻.

(1) 对于任何 t，$T = N(t) + 1$ 是 $X_1, X_2, \cdots$ 的停时;

(2) 当 $\mu = E[X_1] < \infty$ 时，有 $E[S_{N(t)+1}] = \mu(m(t) + 1)$;

(3) 如果 X_j 有界，$|X_j| \leq M$，则 $m(t)/t \to 1/\mu$.

证明.

(1) 对于任何 $n \geq 1$，事件

$$\{T \leq n\} = \{N(t) < n\} = \{S_n > t\}$$

由 $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$ 唯一决定，所以 T 是 $X_1, X_2, \cdots$ 的停时.

(2) 因为 $E[T] = m(t) + 1 < \infty$，$E[X_j] = \mu$，$S_{N(t)+1} = S_T$，应用瓦尔德定理我们有

$$E[S_{N(t)+1}] = \mu E[T] = \mu(m(t) + 1).$$

(3) 用 $S_{N(t)}$ 表示更新过程在 t 以前的最后一次更新时刻，则有 $S_{N(t)} \leq t < S_{N(t)+1}$. 因为 $|X_j| \leq M$，所以有 $S_{N(t)+1} - M \leq S_{N(t)}$，于是

$$S_{N(t)+1} - M \leq t < S_{N(t)+1}.$$

求数学期望后得到

$$\mu(m(t) + 1) - M \leq t \leq \mu(m(t) + 1).$$

两边同时除以 $m(t)$，让 $m(t) \to \infty$ 我们有 $t/m(t) \to \mu$. 于是我们有结论成立. □

定理 2.2: 基本更新定理

如果平均更新间隔 $\mu = E[X_1] < \infty$，则更新函数 $m(t)$ 满足

$$\lim_{t \to \infty} \frac{m(t)}{t} = \frac{1}{\mu}.$$

证明.

由 $t < S_{N(t)+1}$ 我们得到 $t \le \mu(m(t)+1)$，从而有

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{m(t)}{t} \ge \frac{1}{\mu}.$$

只需再证明 $\limsup_{t\to\infty} \frac{m(t)}{t} \le \frac{1}{\mu}$. 对于正整数 M 和 $j = 1, 2, \cdots$，引入随机变量

$$\tilde{X}_j = \begin{cases} X_j, & \text{当 } X_j \le M, \\ M, & \text{当 } X_j > M. \end{cases}$$

证明.

记其数学期望 $\mu_M = E[\tilde{X}_j]$. 用 $\tilde{N}(t)$ 和 $\{\tilde{S}_j\}$ 分别表示以 $\{\tilde{X}_j\}$ 为更新间隔的更新过程和更新流，用 $\tilde{m}(t) = E[\tilde{N}(t)]$ 表示更新函数. 由于 $\tilde{X}_j \le X_j$，所以

$$N(t) = \#\{j|S_j \le t\} \le \#\{j|\tilde{S}_j \le t\} = \tilde{N}(t),$$

从而得到 $m(t) \le \tilde{m}(t)$. 利用命题 2.1 我们有

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{m(t)}{t} \le \limsup_{t\to\infty} \frac{\tilde{m}(t)}{t} = \frac{1}{\mu_M}.$$

令 $M \to \infty$，由命题 2.1 我们有 $\mu_M \to \mu$，从而得证. □

注记 2.3

当 $\mu = \infty$ 时，同样的讨论可知此时基本更新定理依然成立. (此时 $\mu_M \to \infty$.)

基本更新定理表明更新函数 $m(t)$ 和 t/μ 是同阶无穷大，

$$\frac{m(t)}{t/\mu} \to 1, \text{ 当 } t \to \infty \text{ 时.}$$

在基本更新定理中，如果更新函数严格单调上升，有连续的导函数 $m'(t)$，利用洛必达法则得到

$$\lim_{t\to\infty} m'(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{m(t)}{t} = \frac{1}{\mu}.$$

于是对任何非负常数 $a < b$，利用中值定理知道有 c_t 使得

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}[m(b+t)-m(a+t)] &= \lim_{t\to\infty} m'(a+t+c_t)(b-a)\\ &= \frac{b-a}{\mu}.\end{aligned}$$

在一般的情况下，$m(t)$ 是 $[0,t]$ 中的平均更新次数. 因为 μ 是平均更新间隔，所以对充分大的 t，t/μ 也近似等于 $[0,t]$ 中的平均更新次数，也就是说对充分大的 t 有

$$m(t) \approx \frac{t}{\mu}.$$

从而得到

$$m(b+t) - m(a+t) \approx \frac{b+t}{\mu} - \frac{a+t}{\mu} = \frac{b-a}{\mu}.$$

令 $t \to \infty$，形式上也得到

$$\lim_{t\to\infty} [m(b+t) - m(a+t)] = \frac{b-a}{\mu}.$$

定义 3.1

如果随机变量 X 只在正常数 d 的倍数上取值:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(X = nd) = 1,$$

则称 X 是格点随机变量. 如果 d 是使得上式成立的最大正数, 则称 d 是 X 的周期.

如果 X 是有周期 d 的非负格点随机变量，更新间隔 $\{X_j\}$ 来自总体 X，则所有的 X_j 都是格点随机变量，从而到达时刻 S_n 也都是格点随机变量. 这时更新只可能在 $t = nd$ 处发生. 当 n 充分大时，可以理解有

$$m(nd) \approx \frac{nd}{\mu},$$

于是得到

$$m(nd) - m(nd-d) \approx \frac{nd}{\mu} - \frac{nd-d}{\mu} = \frac{d}{\mu}.$$

令 $n \to \infty$，形式上得到

$$m(nd) - m(nd-d) \to d/\mu.$$

注意，$m(nd) - m(nd-d) = E[N(nd-d, nd]]$ 是 $(nd-d, nd]$ 中的平均更新次数，从而是 $t = nd$ 处的平均更新次数.

定理 3.2: 布莱克威尔定理

设 $\mu = E[X_1]$ 是更新过程的平均更新间隔.

(1) 如果 X_1 不是格点随机变量，则对 $b > a \geq 0$，当 $t \to \infty$ 时,

$$m(b+t) - m(a+t) \to \frac{b-a}{\mu};$$

(2) 如果格点随机变量 X_1 有周期 d，则当 $t \to \infty$ 时,

$$m(nd) - m(nd-d) \to \frac{d}{\mu}.$$

注记 3.3

我们可以如下利用布莱克威尔定理证明基本更新定理. 如果 X 是非负非格点随机变量, 取 $b_n = m(n+1) - m(n)$. 由布莱克威尔定理, 当 $n \to \infty$ 时 $b_n \to 1/\mu$, 于是我们知

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} m(n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} b_k = \frac{1}{\mu}.$$

对于任意 $t > 0$, 设 $[t]$ 为 t 的整数部分, 由 $m(t)$ 的单调性我们知

$$\frac{[t]}{t} \frac{m([t])}{[t]} \leq \frac{m(t)}{t} \leq \frac{[t]+1}{t} \frac{M([t]+1)}{[t]+1}.$$

令 $t \to \infty$ 我们知当 $t \to \infty$ 时, $m(t)/t \to 1/\mu$. 如果 X 是有周期 d 的非负格点随机变量, 取 $b_n = M((n+1)d) - M(nd)$, 和上类似讨论可得.

设 $h(t)$ 是 $[a,b)$ 上的函数，如果 $\int_a^b |h(t)|dt < \infty$，则称 $h(t)$ 在 $[a,b)$ 上可积，或称 $h(t)$ 是 $[a,b)$ 上的可积函数.

命题 4.1

对于 $[0,\infty)$ 上的可积函数 $h(s)$，当 $M \to \infty$ 时，有

$$\int_M^\infty |h(s)|ds \to 0.$$

设 $h(t)$ 是 $[0,\infty)$ 上的非负函数. 对于 $a>0$，用 $\underline{m_n}(a)$ 和 $\overline{m_n}(a)$ 分别表示 $h(t)$ 在 $[(n-1)a, na]$ 中的上确界和下确界. 如果对 $a>0$，$\sum_{n=1}^{\infty}\overline{m_n}(a)<\infty$，且

$$\lim_{a\to 0}\sum_{n=1}^{\infty} a\underline{m_n}(a)=\lim_{a\to 0}\sum_{n=1}^{\infty} a\overline{m_n}(a)<\infty.$$

则称 $h(t)$ 直接黎曼可积.
直接黎曼可积函数是 $[0,\infty)$ 上的可积函数. 但是 $[0,\infty)$ 上的可积函数不一定直接黎曼可积.
如果能将 $[0,\infty)$ 分成有限段的并，使得 $h(t)$ 在各段上有界且单调可积，则 $h(t)$ 直接黎曼可积. 如果 z 在 $[0,\infty)$ 上可积且存在一个直接黎曼可积函数 g 使得 $z\le g$，则 z 是直接黎曼可积的.

定理 4.2: 关键更新定理

设 $\mu = E[X_1] < \infty$ 是平均更新间隔. 如果 X_1 不是格点随机变量, 则对 $[0, \infty)$ 上的任何直接黎曼可积函数 $h(s)$, 有

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t h(t-x)dm(x) = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty h(s)ds.$$

证明.

只对更新密度 $m'(t)$ 连续有界的情形给出证明. 设 $\sup_t m'(t) + 1/\mu \le M_0$，由基本更新定理和洛必达法则知道 $m'(t) \to \mu^{-1}$. 对于充分大的 t，有 $M > 0$ 使得

$$\sup_{0\le s\le M} |m'(t-s) - \mu^{-1}| < \epsilon,\ \frac{1}{\mu}\int_t^\infty h(s)ds = o(1),\ t \to \infty.$$

证明.

于是当 $t \to \infty$ 时，有

$$
\begin{aligned}
& |\int_0^t h(t-x)dm(x) - \frac{1}{\mu}\int_0^\infty h(s)ds| \\
=& |\int_0^t h(s)m'(t-s)ds - \frac{1}{\mu}\int_0^t h(s)ds + o(1)| \\
\leq & \int_0^t h(s)|m'(t-s) - \mu^{-1}|ds + o(1) \\
\leq & \int_0^M h(s)|m'(t-s) - \mu^{-1}|ds + \int_M^t h(s)|m'(t-s) - \mu^{-1}|ds + o(1) \\
\leq & \epsilon \int_0^\infty h(s)ds + M_0 \int_M^\infty h(s)ds + o(1).
\end{aligned}
$$

在上式左端令 $t \to \infty$，然后在右端令 $M \to \infty$，最后令 $\epsilon \to 0$，我们知上式左端趋于 0. □

注记 4.3

如果 X_1 是周期 d 的格点随机变量，那么可以证明

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t h(t-x)dm(x)=\frac{d}{\mu}\sum_{k=0}^{\infty}h(t+kd).$$

推论 4.4

设 $\mu = E[X_1] < \infty$，X_1 不是格点随机变量，则对 $[0,\infty)$ 上单调不增的非负函数 $h(t)$，有

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t h(t-x)dm(x) = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty h(s)ds.$$

证明.

因为 $h(s)$ 是单调不减的非负函数，所以它在 $[0,\infty)$ 中可积时，必然直接黎曼可积，这时结论成立. 下面对 $[0,\infty)$ 上的积分等于无穷的 $h(s)$，验证

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t h(t-x)dm(x)=\infty.$$

对 $n\geq 1$，定义

$$h_n(s)=\begin{cases} h(s), & \text{当 } s\leq n, \\ 0, & \text{当 } s>n, \end{cases}$$

证明.

则有 $h_n(s) \leq h(s)$. h_n 在 $[0, \infty)$ 上单调不增非负可积，于是得到

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\int_0^t h(t-x)dm(x) &\geq \lim_{t\to\infty}\int_0^t h_n(t-x)dm(x) \\ &= \frac{1}{\mu}\int_0^\infty h_n(s)ds \\ &= \frac{1}{\mu}\int_0^n h(s)ds.\end{aligned}$$

令 $n \to \infty$ 即得. $\square$