

第 10 次作业

截止日期：5 月 12 日

习题 1. 课本 P134 习题 3.21.

证明. 设第 i 个乘客到达时间为 S_i . 称一次发船是一次更新. 记 Y 为一次更新的收益. 于是

$$Y = c \sum_{i=1}^{N(T)} (T - S_i).$$

由课本 P40 例 2.2, 我们有

$$\begin{aligned} E[Y] &= c E\left[\sum_{i=1}^{N(T)} (T - S_i)\right] \\ &= c \sum_{n=0}^{\infty} E\left[\sum_{i=1}^{N(T)} (T - S_i) | N(T) = n\right] P(N(T) = n) \\ &= c \sum_{n=0}^{\infty} E\left[\sum_{i=1}^n (T - S_i) | N(T) = n\right] P(N(T) = n) \\ &= c \sum_{n=0}^{\infty} E\left[nT - n \cdot \frac{T}{2}\right] P(N(T) = n) \\ &= \frac{1}{2} c \lambda T^2. \end{aligned}$$

于是单位时间的平均收益为

$$\frac{E[Y]}{T} = \frac{1}{2} \lambda c T.$$

□

习题 2. 课本 P145 练习 4.2 (3)(4).

证明. 因为

$$p_{ij}^{(n+1)} = \sum_{k \in I} p_{ik} p_{kj}^{(n)} \leq \sum_{k \in I} p_{ik} M(n) = M(n),$$

我们有 $M(n+1) \leq M(n)$, 类似地 $m(n+1) \geq m(n)$.

□

习题 3. 课本 P155 练习 4.3 (2).

证明. 若不然, 则存在 $n > 1$, 使得

$$p_{ij}^{(n)} > 0.$$

于是 $i \rightarrow j$. 而 i 是常返的, 则 j 也是常返的 (课本定理 3.1), 矛盾. $\square$

习题 4. 课本 P199 习题 4.3.

答案. $\{1, 2\}$ 是常返等价类, 3, 4 非常返, 5 是吸引状态. $\square$

习题 5. 令 P 是某个马氏链的转移概率矩阵. 假设存在自然数 r , 使得 P^r 的每个元素都严格大于 0. 证明: 对于所有的自然数 $n \geq r$, P^n 的每个元素都严格大于 0.

证明. 由 K-C 方程, 我们知对于任意自然数 $n \geq r$, 以及任意 $i, j \in I$

$$(P^n)_{ij} = \sum_{k \in I} (P^{n-r})_{ik} (P^r)_{kj}.$$

由 P 是概率矩阵我们知存在 $k_0 \in I$ 使得 $(P^{n-r})_{ik_0} > 0$, 所以

$$(P^n)_{ij} \geq (P^{n-r})_{ik_0} (P^r)_{k_0j} > 0. \quad \square$$