

第 18 讲 状态空间的分类

状态的互通性

常返与非常返态

正常返与零常返状态

周期及其性质

遍历状态

状态空间的分解

状态的互通性

常返与非常返态

正常返与零常返状态

周期及其性质

遍历状态

状态空间的分解

状态的互通性

常返与非常返态

正常返与零常返状态

周期及其性质

遍历状态

状态空间的分解

定义 1.1

设 I 是马氏链 $\{X_n\}$ 的状态空间. $i, j \in I$ 是其中的两个状态.

- (1) 如果 $p_{ii} = 1$, 则称 i 是吸引状态;
- (2) 如果存在 $n \geq 1$ 使得 $p_{ij}^{(n)} > 0$, 则称 i 通 j , 记做 $i \rightarrow j$;
- (3) 如果 $i \rightarrow j$ 且 $j \rightarrow i$, 则称 i, j 互通, 记做 $i \leftrightarrow j$.

$i \rightarrow j$ 表示质点从 i 出发以正概率到达 j . i, j 互通表明质点从 i 到 j 后, 以正概率回到 i , 反之亦然.

状态的互通性

常返与非常返态

正常返与零常返状态

周期及其性质

遍历状态

状态空间的分解

例 1.2

对于两端是吸收壁的简单随机游动，状态 0 和 n 都是吸引状态.

命题 1.3

设 I 是马氏链 $\{x_n\}$ 的状态空间. $i, j \in I$ 是其中的两个状态. 则 $i \rightarrow j$ 当且仅当

$$P_i(\text{存在 } n \geq 0 \text{ 使得 } X_n = j) > 0.$$

证明.

注意到

$$p_{ij}^{(n)} \leq P_i(\text{存在 } n \geq 0 \text{ 使得 } X_n = j) \leq \sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)},$$

可知上面两个条件等价. □

状态的互通性

常返与非常返态

正常返与零常返状态

周期及其性质

遍历状态

状态空间的分解

命题 1.4

如果 $i \leftrightarrow j$, 那么 $j \leftrightarrow i$.

状态的互通性

常返与非常返态

正常返与零常返状态

周期及其性质

遍历状态

状态空间的分解

命题 1.5

如果 $i \rightarrow j$ 且 $j \rightarrow k$, 则 $i \rightarrow k$.

证明.

如果 $i \rightarrow j$ 且 $j \rightarrow k$, 则存在 n, m 使得 $p_{ij}^{(n)} p_{jk}^{(m)} > 0$, 我们有

$$p_{ik}^{(n+m)} \geq p_{ij}^{(n)} p_{jk}^{(m)} > 0,$$

于是 $i \rightarrow k$. □

状态的互通性

常返与非常返态

正常返与零常返状态

周期及其性质

遍历状态

状态空间的分解

状态的互通性

常返与非常返态

正常返与零常返状态

周期及其性质

遍历状态

状态空间的分解

对于马氏链 $\{X_n\}$, 引入条件概率

$$f_{ij}^{(1)} = P(X_1 = j | X_0 = i),$$

$$f_{ij}^{(n)} = P(X_n = j, X_k \neq j; 1 \leq k \leq n-1 | X_0 = i), \quad n \geq 1.$$

$f_{ij}^{(n)}$ 是质点从 i 出发的条件下, 第 n 步首次到达 j 的概率, 称为从 i 出发后第 n 步首达 j 的概率, 简称为首达概率.

由于对不同的 n , 事件

$$A_1 = \{X_1 = j\}, A_n = \{X_n = j, X_k \neq j, 1 \leq k \leq n-1\} \quad (2.1)$$

互不相容, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 发生表示质点到达过状态 j , 所以

$$f_{ij}^* := P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n | X_0 = i\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n | X_0 = i) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} \leq 1.$$

f_{ij}^* 是质点从 i 出发的条件下到达过 j 的概率, 简称从 i 出发后到达 j 的概率.

定义 2.1

如果 $f_{ii}^* = 1$, 则称 i 是常返状态. 如果 $f_{ii}^* < 1$, 则称 i 是非常返态.

按照定义, 吸引状态满足 $f_{ii}^* = f_{ii}^{(1)} = 1$, 因而是常返状态. 当 i 是常返状态时, 质点从 i 出发后, 在实际中必然回到 i , 再从 i 出发, 再回到 i , 因而回到 i 无穷次. i 是非常返态表明质点从 i 出发后, 以正概率不能回到 i , 因而只能回到 i 有限次, 然后永远离开状态 i .

状态的互通性

常返与非常返态

正常返与零常返状态

周期及其性质

遍历状态

状态空间的分解

定理 2.2

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^n f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}.$$

证明.

设 A_n 由 (2.1) 定义, 则 A_1, A_2, \dots, A_n 互不相容. $\bigcup_{k=1}^n A_k$ 表示前 n 次转移中到达过 j , 所以 $\{X_n = j\} \subset \bigcup_{k=1}^n A_k$. 于是应用全概率公式, 我们有:

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(n)} &= P(X_n = j | X_0 = i) \\ &= \sum_{k=1}^n P(A_k | X_0 = i) P(X_n = j | A_k, X_0 = i) \\ &= \sum_{k=1}^n f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}. \end{aligned}$$

□

定理 2.3

对于马氏链 $\{X_n\}$ 以及 $\{p_{ii}^{(n)}\}$, $f_{ii}^{(n)}$, 有以下结果:

- (1) $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \frac{1}{(1-f_{ii}^*)}$;
- (2) i 是常返状态的充分必要条件是 $\sum_{i=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$;
- (3) 如果 i 是常返状态, $i \rightarrow j$, 则 $i \leftrightarrow j$, 并且 j 也是常返的.

引理 2.4

(1) 如果 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ 收敛, 则

$$\lim_{s \rightarrow 1^-} \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = a.$$

(2) 如果 $a_k \geq 0$ 且 $\lim_{s \rightarrow 1^-} \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k = a \leq \infty$, 则

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k = a.$$

证明.

在定理 2.2 中取 $j = i$, 两边再同时乘以 ρ^n , 对 $n \geq 1$ 我们有

$$\rho_{ii}^{(n)} \rho^n = \sum_{k=1}^n f_{ii}^{(k)} \rho^k p_{ii}^{(n-k)} \rho^{n-k}, \quad \rho \in (0, 1).$$

上式两边对 n 求和得到

$$\begin{aligned} G(\rho) &= \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} \rho^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} \rho^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n f_{ii}^{(k)} \rho^k p_{ii}^{(n-k)} \rho^{n-k} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} f_{ii}^{(k)} \rho^k p_{ii}^{(n-k)} \rho^{n-k} \\ &= 1 + \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_{ii}^{(k)} \rho^k \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} \rho^n \right) \\ &= 1 + F(\rho)G(\rho), \end{aligned}$$

状态的互通性

常返与非常返态

正常返与零常返状态

周期及其性质

遍历状态

状态空间的分解

证明.

其中 $F(\rho) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{ii}^{(k)} \rho^k$. 于是得到

$$G(\rho) = 1/[1 - F(\rho)].$$

令 $\rho \rightarrow 1-$ 就得到结论 (1).

结论 (2) 是结论 (1) 的直接推论.

下面证明结论 (3). 首先我们证明 $i \leftrightarrow j$. 因为 $i \rightarrow j$, 可见自 i 出发, 最终要到达 j , 而且中间不经过 i 的概率应大于 0; 因此, 必存在 $N(> 0)$, 使自 i 出发, 于第 N 步初次到达 j , 而且中间不经过 i 的概率 $f_{i,ij}^{(N)} > 0$. 下面我们证明 $f_{ji}^* = 1$, 于是 $j \rightarrow i$. 若 $f_{ji}^* < 1$, 则自 i 出发, 不回到 i 的概率至少为 $f_{i,ij}^{(N)}(1 - f_{ji}^*) > 0$, 此与 i 为常返的假设矛盾.

证明.

再证明 j 是常返的. 设 n, m 使得 $p_{ji}^{(m)} p_{ij}^{(n)} > 0$. 对于任意 $k \geq 1$, 我们有

$$p_{jj}^{(m+k+n)} \geq p_{ji}^{(m)} p_{ii}^{(k)} p_{ij}^{(n)}.$$

两边对 k 求和我们有

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_{jj}^{(m+k+n)} \geq p_{ji}^{(m)} p_{ij}^{(n)} \sum_{k=1}^{\infty} p_{ii}^{(k)} = \infty,$$

由 (2) 知道 j 是常返的. □

状态的互通性

常返与非常返态

正常返与零常返状态

周期及其性质

遍历状态

状态空间的分解

状态的互通性

常返与非常返态

正常返与零常返状态

周期及其性质

遍历状态

状态空间的分解

记

$$T_i = \begin{cases} \min\{n | X_n = i; n \geq 1\}, & \text{当 } \bigcup_{i=1}^{\infty} \{X_n = i\} \text{ 发生,} \\ \infty, & \text{否则.} \end{cases}$$

对于马氏链 $\{X_n\}$, T_i 是质点首次到达状态 i 时的转移次数. $T_i = n$ 表示质点第 $n (\geq 1)$ 次转移首次到达状态 i .

引入条件概率 $P_i(\cdot) = P(\cdot | X_0 = i)$, 则

$$f_{ii}^{(n)} = P_i(T_i = n) = P(T_i = n | X_0 = i)$$

是把质点从 i 出发的条件下, 第 n 步首次回到 i 的概率. 当 $f_{ii}^* = 1$ 时, 则 $P_i(T_i < \infty) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} = 1$. 在条件 $X_0 = i$ 时, T_i 的数学期望

$$\mu_i = E[T_i | X_0 = i] = \sum_{n=1}^{\infty} n P_i(T_i = n) = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)}. \quad (3.1)$$

μ_i 是质点返回状态 i 所需要的平均转移次数, 称 μ_i 为状态 i 的平均回转时间或期望回转时间. 平均回转时间 μ_i 越小, 表明质点返回 i 越频繁. 当 $\mu_i = \infty$, 说明质点平均转移无穷次才能回到 i .

定义 3.1

设 i 是常返状态. 如果 i 的回转时间 $\mu_i < \infty$, 则称 i 是正常返状态. 如果 i 的回转时间 $\mu_i = \infty$, 则称 i 是零常返状态.

定理 3.2

设 i 是常返状态, 则

- (1) i 是零常返状态的充分必要条件是 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ii}^{(n)} = 0$;
- (2) 当 i 是零常返的, $i \rightarrow j$ 时, j 也是零常返的;
- (3) 当 i 是正常返的, $i \rightarrow j$ 时, j 也是正常返的.

证明.

下面证明 (2). 由定理 2.3 (3) 我们知 $i \leftrightarrow j$. 设正整数 m, n 使得 $p_{ij}^{(n)} p_{ji}^{(m)} > 0$, 于是

$$p_{ii}^{(n+k+m)} \geq p_{ij}^{(n)} p_{jj}^{(k)} p_{ji}^{(m)}.$$

由 $p_{ii}^{(n)} \rightarrow 0$, 我们有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p_{jj}^{(k)} \leq \frac{1}{p_{ij}^{(n)} p_{ji}^{(m)}} \lim_{k \rightarrow \infty} p_{ii}^{(n+k+m)} = 0.$$

这说明 j 是零常返的. 由 (2) 可得到 (3). □

命题 3.3

如果 j 不是正常返的, 则对任意状态 i , 有

$$p_{ij}^{(n)} \rightarrow 0, \text{ 当 } n \rightarrow \infty \text{ 时.}$$

证明.

对非常返的 j , 由定理 2.3 (2) 我们有 $\sum_{i=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty$, 从而 $p_{jj}^{(n)} \rightarrow 0$. 对零常返的 j , 利用定理 3.2 我们有 $p_{jj}^{(n)} \rightarrow 0$. 对任意状态 i , 我们有

$$\begin{aligned} p_{(ij)}^{(n)} &= \sum_{k=1}^m f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)} + \sum_{k=m+1}^n f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)} \\ &\leq \sum_{k=1}^m p_{jj}^{(n-k)} + \sum_{k=m+1}^n f_{ij}^{(k)} \end{aligned}$$

令 $n \rightarrow \infty$, 右方的第一项 $\sum_{k=1}^m p_{jj}^{(n-k)} \rightarrow 0$, 于是得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} f_{ij}^{(k)}.$$

因为 $\sum_{k=1}^{\infty} f_{ij}^{(k)} \leq 1$, 所以再令 $m \rightarrow \infty$ 我们就得到结论. □

上面命题说明, 只要 j 不是正常返的, 从任何 i 出发, 较长的时间后, 质点位于 j 的概率非常小.

状态的互通性

常返与非常返态

正常返与零常返状态

周期及其性质

遍历状态

状态空间的分解

对于一般的马氏链 $\{X_n\}$, 定义状态 i 的周期如下:

- (1) 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = 0$, 则质点从 i 出发不可能再回到 i , 这时称 i 的周期是 ∞ .
- (2) 设 d 为正整数, 质点从 i 出发, 如果只可能在 d 的整数倍上回到 i , 而且 d 是具有此性质的最大正数, 则称 i 的周期是 d ;
- (3) 如果 i 的周期为 1, 则称 i 是非周期的.

其中的 (2) 说明, 称状态 i 的周期是 d , 如果 $p_{ii}^{(n)} > 0$, 则必有 $n = md$, 并且 d 是满足此性质最大的整数. 但当 i 的周期 $d < \infty$ 时, $p_{ii}^{(nd)} > 0$ 也不必对所有的 n 成立, 但至少对某个 n 成立.

例 4.1

在直线上, 如果质点每次向前、向后移动 1 步的概率都是 $1/3$, 向后移动 2 步的概率也是 $1/3$, 则每个状态都是非周期的.

证明.
易见

$$p_{ii}^{(2)} \geq p_{i,i+1}p_{i+1,i} > 0,$$

$$p_{ii}^{(3)} \geq p_{i,i+2}p_{i+2,i-1}p_{i-1,i} > 0,$$

于是从 $2 = nd, 3 = md$ 得到 $d = 1$. i 的周期是 $d = 1$, i 是非周期的. □

例 4.2

在直线上, 如果质点每次向前移动 1 步的概率都是 p , 向后移动 5 步的概率都是 $q = 1 - p$, $pq > 0$, 则每个状态的周期都是 6.

证明.

质点从 i 出发, 经过 n 次转移回到 i 时, 我们说明 $n = 6m$. 设质点向前一共移动了 k 次, 向后一共移动了 m 次, 根据题意得到 $k = 5m$. 于是质点移动的次数 $n = k + m = 5m + m = 6m$. 又由于 $p_{ii}^{(6)} > p^5 q > 0$, 所以状态 i 的周期是 $d = 6$. □

以后总用 d_i 表示 i 的周期. 下面的定理给出了周期 d_i 的数字描述.

定理 4.3

若状态 i 的周期 $d_i < \infty$, 则

- (1) d_i 是数集 $B_i = \{n | p_{ii}^{(n)} > 0, n \geq 1\}$ 的最大公约数;
- (2) 如果 $i \leftrightarrow j$, 则 $d_i = d_j$;
- (3) 存在正数 N_i 使得当 $n \geq N_i$ 时, $p_{ii}^{(nd_i)} > 0$.

证明.

(1) 由定义直接可得.

(2) 设正整数 m, n 使得 $p_{ji}^{(m)} p_{ij}^{(n)} > 0$. 对于任意 $k \in B_i = \{k | p_{ii}^{(k)} > 0, k \geq 1\}$, 我们有

$$p_{jj}^{(m+n)} \geq p_{ji}^{(m)} p_{ij}^{(n)} > 0,$$

$$p_{jj}^{(m+k+n)} \geq p_{ji}^{(m)} p_{ii}^{(k)} p_{ij}^{(n)} > 0.$$

于是 d_j 整除 $m+n$ 和 $m+k+n$, 于是 $k | (m+k+n) - (m+n)$, 于是整除 B_i 中的所有元, 从而得到 d_j 整除 d_i . 对称地我们可以得到 d_i 整除 d_j , 所以 $d_i = d_j$.

□

证明.

(3) 设 (1) 中的 $B_i = \{n_1, n_2, \dots\}$, l_m 是子集 $\{n_1, n_2, \dots, n_m\}$ 的最大公约数, 则 d_i 是 l_m 的约数, 且 l_m 单调不增收敛到 d_i . 因为 l_m 是整数, 所以有 k 使得 $d_i = l_k$ 是 $\{n_1, n_2, \dots, n_k\}$ 的最大公约数. 根据数论的基本知识知道存在 N_i , 使得只要 $n \geq N_i$, 就有

$$nd_i = n_1 m_1 + \dots + n_k m_k, \quad m_i \text{ 是非负整数.}$$

于是我们有

$$\begin{aligned} p_{ii}^{(nd_i)} &\geq p_{ii}^{(n_1 m_1)} p_{ii}^{(n_2 m_2)} \dots p_{ii}^{(n_k m_k)} \\ &\geq [p_{ii}^{(n_1)}]^{m_1} [p_{ii}^{(n_2)}]^{m_2} \dots [p_{ii}^{(n_k)}]^{m_k} > 0. \end{aligned}$$

□

定义 5.1

如果状态 i 是正常返和非周期的, 则称 i 是遍历状态.

定理 5.2

设常返状态 i 有周期 d_i 和平均回转时间

$$\mu_i = E[T_i | X_0 = i],$$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ii}^{(nd_i)} = \frac{d_i}{\mu_i}.$$

上面定理表明, 质点从常返状态 i 出发后, 对于充分大的 n , 质点在第 nd_i 步回到 i 的概率与 d_i 成正比, 与回转时间 μ_i 成反比.

根据本讲中的讨论, 对于常返状态 i , 如果 $i \rightarrow j$, i 的性质就会传递给 j : 这时有 $j \leftrightarrow i$; $d_j = d_i$; $\mu_j < \infty$ 的充分必要条件是 $\mu_i < \infty$; 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $p_{jj}^{(n)}$ 的充分必要条件是 $p_{ii}^{(n)} \rightarrow 0$. 这些结果说明 $i \leftrightarrow j$ 时, j 是正常返状态的充分必要条件为 i 是正常返状态; j 是遍历状态的充分必要条件为 i 为遍历状态.

如果 i 是非常返状态, 从 $i \rightarrow j$ 我们还不能得到关于 j 的更多信息. 这时 j 可以是常返的 (参考两边是吸收壁的简单随机游动中的 0 或 n), 也可以是非常返的 (参考两边是吸收壁的简单随机游动中的 $i, j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$).

命题 5.3

对于常返状态 j , 有

- (1) $\mu_j \geq 1$;
- (2) 当 $i \rightarrow j$ 时, 质点从 i 出发以概率 1 到达 j :

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_{ij}^{(k)} = P(T_j < \infty | X_0 = i) = 1;$$

- (3) 当 j 是遍历状态, $i \leftrightarrow j$ 时, 有

$$p_{ij}^{(n)} \rightarrow \pi_j := 1/\mu_j.$$

证明.

(1) 由 (3.1) 我们知

$$\mu_j = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{jj}^{(n)} \geq \sum_{n=1}^{\infty} f_{jj}^{(n)} = 1.$$

(2) 实际上在定理 2.3 (3) 的证明过程中我们已经证明了这一点.

证明.

(3) 遍历状态的周期是 1, 所以用定理 5.2 我们有

$$\pi_j = \frac{1}{\mu_j} = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{jj}^{(n)} \in (0, 1].$$

对于 $1 \leq m \leq n$, 我们有

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^m f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)} + \sum_{k=m+1}^n f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}.$$

令 $n \rightarrow \infty$ 时, 右边第一项收敛到 $\sum_{k=1}^m f_{ij}^{(k)} \pi_j$, 第二项极限不超过 $b_m = \sum_{k=m+1}^{\infty} f_{ij}^{(k)}$, 于是得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^m f_{ij}^{(k)} \pi_j + O(b_m).$$

再令 $m \rightarrow \infty$, 注意到 $b_m \rightarrow 0$ 并利用 (2) 我们知结论成立. □

状态的互通性

常返与非常返态

正常返与零常返状态

周期及其性质

遍历状态

状态空间的分解

状态的互通性

常返与非常返态

正常返与零常返状态

周期及其性质

遍历状态

状态空间的分解

状态的互通性

常返与非常返态

正常返与零常返状态

周期及其性质

遍历状态

状态空间的分解

定义 6.1

设 I 是马氏链 $\{X_n\}$ 的状态空间, $i \in I$. 把和 i 互通的状态放在一起, 得到集合

$$C = \{j | j \leftrightarrow i, j \in I\}.$$

- (1) 称 C 是一个等价类;
- (2) 如果 I 是一个等价类 (所有状态互通), 则称马氏链 $\{X_n\}$ 或状态空间 I 不可约;
- (3) 设 B 是 I 的子集, 如果质点不能从 B 中的状态到达 $B^c = I - B$ 中的状态, 则称 B 是闭集.

我们知道如果等价类 C 中有一个常返状态, 则 C 中的一切状态都是常返的, 这时称 C 是常返等价类.

定理 6.2

设 C 是一个等价类, 则有以下结果:

- (1) 不同的等价类互不相交.
- (2) C 中的状态有相同的类型: 或都是正常返的, 或都是零常返的, 或都是非常返的. 在任何情况下, C 中的状态有相同的周期.
- (3) 常返等价类是闭集: 质点不能走出常返等价类.
- (4) 零常返等价类含有无穷个状态.
- (5) 非常返等价类如果是闭集, 则含有无穷个状态.

证明.

设 C 和 C_1 都是等价类, 如果有 $i \in C \cap C_1$, 由互通的传递性我们知 i 和 $C \cup C_1$ 中的所有状态互通, 于是必有 $C = C_1$. 所以 (1) 成立.

由定理 4.3 和定理 3.2 我们可得 (2).

如果 $i \in C$, $i \rightarrow j$, 由定理 2.3 我们有 $i \leftrightarrow j$, 从而 $j \in C$. 于是 (3) 成立.

(4) 和 (5) 的证明: 因为 C 是闭集, 所以有

$$\sum_{j \in C} p_{ij}^{(n)} = 1.$$

由命题 3.3, 如果 C 是零常返或非常返等价类, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 总有 $p_{ij}^{(n)} \rightarrow 0$. 如果 C 中只有有限个状态, 在上式中令 $n \rightarrow \infty$, 我们得 $0 = 1$. 这说明 C 不能是有限集合. □

于是我们知, 当 C 中有正常返状态, 则 C 中的所有状态都是正常返的, 于是称 C 是正常返等价类; 当 C 中有零常返状态, 则 C 中的所有状态都是零常返的, 于是称 C 是零常返等价类; 当 C 中有非常返状态, 于是称 C 是非常返等价类; 当 C 的某个状态有周期 d , 则 C 中所有状态的周期都是 d , 于是称 C 的周期是 d ; 当 C 中有一个遍历状态, C 中的状态都是遍历的, 这时又称 C 是遍历等价类.

利用等价关系可以把马氏链的状态空间 I 分解成

$$I = \bigcup_{j=1}^n C_j + T, \text{ 这里 } n \leq \infty, \quad (6.1)$$

其中 C_j 是常返等价类, T 由全体非常返状态组成. 质点可以永远在 T 中运动, 也可以从 T 转移到某个 C_j 中, 然后永远在 C_j 中运动. 如果 T 是有限集合, 质点一定会走出 T , 进入某个闭集 C_j , 然后永远在 C_j 中运动.

按照 (6.1) 的规律重新编排状态的顺序后可以将该马氏链的转移矩阵写成

$$\begin{matrix} & C_1 & C_2 & \cdots & C_{m-1} & C_m & T \\ \begin{matrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_m \\ T \end{matrix} & \begin{pmatrix} P_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & P_m & 0 \\ R_1 & R_2 & \cdots & R_{m-1} & R_m & Q_T \end{pmatrix} & = P. \end{matrix} \quad (6.2)$$

由于常返等价类 C_k 是闭集, 所以对应的 $P_k = (p_{ij})_{i,j \in C_k}$ 的每行之和是 1. 这就相当于 C_k 本身是一个不可约马氏链, 质点从 C_j 中的状态出发或从 T 进入 C_j 后就永远在 C_j 中运动.

利用 $P^{(n)} = P^n$ 和矩阵乘法得到

$$\begin{matrix} & C_1 & C_2 & \cdots & C_{m-1} & C_m & T \\ \begin{matrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_m \\ T \end{matrix} & \begin{pmatrix} P_1^n & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_2^n & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & P_m^n & 0 \\ R_1^{(n)} & R_2^{(n)} & \cdots & R_{m-1}^{(n)} & R_m^{(n)} & Q_T^n \end{pmatrix} & = P^{(n)}. \end{matrix} \quad (6.3)$$

由于马氏链 $\{X_n\}$ 可以有无穷个常返等价类, 所以 (6.2) 和 (6.3) 中的 C_m , P_m , R_m 和 P_m^n , $R_m^{(n)}$ 可以同时改写为 "...". P_m^n 的每行之和等于 1. 另外, 用 $q_{ij}^{(n)}$ 表示 Q_T^n 的对应元素, 于是由命题 3.3, 我们还有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_T^n = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} q_{ij}^{(n)} \right)_{i,j \in T} = 0.$$

状态的互通性

常返与非常返态

正常返与零常返状态

周期及其性质

遍历状态

状态空间的分解