

# 第 19 讲 简单随机游动的常返性, 质点在常返等价类中的转移

## 简单随机游动的常返性

## 质点在常返等价类中的转移

## 简单随机游动

简单随机游动中所有状态互通,  $\{X_n\}$  是一个不可约马氏链,  $I$  是一个等价类. 要研究  $I$  是否为常返等价类, 只要研究状态  $i$ . 如果质点在第  $2n$  步回到  $i$ , 则向左和向右各移动了  $n$  次. 设每次移动向右的概率为  $p$ , 由二项分布的性质我们可以得到

$$p_{ii}^{(2n)} = C_{2n}^n p^n q^n, \quad p_{ii}^{(2n-1)} = 0.$$

当  $s = 4pq < 1$  时, 有

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} &= \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(2n)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!n!} (pq)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{3}{2}\right) \cdots \frac{2n-1}{2} s^n = (1-s)^{-1/2}. \quad (\text{用 Taylor 级数展开}) \end{aligned}$$

由于  $4pq \leq 1$ , 且  $4pq = 1$  的充分必要条件是  $p = q$ , 所以  $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$  的充分必要条件是  $p = q$ . 于是  $p = q$  时, 直线上的简单对称随机游动是常返的. 当  $p \neq q$  时, 非对称的简单随机游动是非常返的.

用  $a_n \simeq b_n$  表示  $a_n/b_n \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty)$ . 利用斯特林公式

$$n! \simeq n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}, \quad (1.1)$$

可以进一步证明简单对称随机游动是零常返的. 实际上, 由上式我们有

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ii}^{(2n)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} C_{2n}^n \frac{1}{2^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!}{n!n!} \frac{1}{2^{2n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{4\pi n}}{n^{2n} e^{-2n} 2\pi n e^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} = 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

于是  $i$  是零常返的.

# 两端是吸收壁和两端是反射壁的简单随机游动

第 19 讲 简单随机游动的常返性, 质点在常返等价类中的转移

简单随机游动的常返性

质点在常返等价类中的转移

在两端是吸收壁的简单随机游动中,  $\{1, 2, \dots, n-1\}$  是一个等价类. 因为质点从 1 出发后不回到 1 的概率  $1 - f_{11}^* > P(X_1 = 0 | X_0 = 1) = q > 0$ , 所以  $\{1, 2, \dots, n-1\}$  是非常返等价类,  $\{0\}$  和  $\{n\}$  是正常返等价类.

在两端是反射壁的简单随机游动中,  $\{0, 1, 2, \dots, n\}$  是一个等价类. 由于  $I$  是闭集, 且只有  $n+1$  个状态. 所以  $I$  是正常返等价类.

## 平面上的简单对称随机游动

设质点在平面的整数格点上做随机游动, 每次以  $1/4$  的概率向最邻近的 4 个状态转移. 将所有的格点编号后得到状态空间  $I$ . 易见  $I$  的状态互通, 因而是 一个等价类. 质点从  $i$  出发后, 只可能在  $2n$  步上回到  $i$ , 这时质点向左、右各移动  $k$  步, 向上、下各移动  $n - k$  步. 用组合公式  $\sum_{k=0}^n (C_n^k)^2 = C_{2n}^n$ , 利用斯特林公式 (1.1), 以及 (1.2) 我们有

$$\begin{aligned} p_{ii}^{(2n)} &= \frac{1}{4^{2n}} \sum_{k=0}^n \frac{(2n)!}{[k!(n-k)!]^2} \\ &= \frac{1}{4^{2n}} C_{2n}^n \sum_{k=0}^n (C_n^k)^2 = \left( \frac{1}{2^{2n}} C_{2n}^n \right)^2 \\ &\simeq 1/(\pi n). \end{aligned}$$

由于  $\sum_{n \geq 1} n^{-1} = \infty$ , 所以平面上的简单对称随机游动也是常返的, 再从  $p_{ii}^{(2n)} \rightarrow 0$  知道, 平面上的简单对称随机游动是零常返的.

## 三维空间上的简单对称随机游动

设质点在三维直角坐标中的整数格点上做随机游动, 每次以  $1/6$  的概率向最邻近的 6 个状态转移. 将所有的格点编号后得到状态空间  $I$ . 易见  $I$  的状态互通, 因而是个等价类. 设  $K_n = \{j, k | j, k \geq 0, j + k \leq n\}$ , 则

$$p_{ii}^{(2n+1)} = 0,$$

$$p_{ii}^{(2n)} = \frac{1}{6^{(2n)}} \sum_{j,k \in K_n} \frac{(2n)!}{[j!k!(n-j-k)!]^2}.$$

可以验证  $k = j = [n/3]$  (与  $n/3$  最近的整数),  $n!/(j!k!(n-j-k)!)$  达到最大值, 再用斯特林公式得到

$$\frac{1}{3^n} \max_{j,k \in K_n} \frac{n!}{j!k!(n-j-k)!} = O(n^{-1}).$$

## 上式与三项公式

$$\sum_{j,k \in K_n} \frac{n!}{j!k!(n-j-k)!} = (1+1+1)^n = 3^n$$

结合, 得到

$$p_{ii}^{(2n)} \leq \frac{1}{2^{2n}3^{2n}} C_{2n}^n \max_{j,k \in K_n} \frac{n!}{j!k!(n-j-k)!} 3^n = O(n^{-3/2}).$$

由于  $\sum_{n \geq 1} n^{-3/2} < \infty$ , 所以三维空间中的简单对称随机游动是非常返的.

当  $C$  是常返等价类时, 我们知  $C$  是闭集. 质点从  $C$  中出发将永远在  $C$  中运动. 质点在  $C$  中的运动也是一个马氏链, 仍然用  $\{X_n\}$  表示.

### 例 2.1

考虑直线上的简单对称随机游动. 这时, 状态空间  $I = \{j | j = 0, 1, \pm 1, \pm 2, \dots\}$  中的所有状态互通, 是一个常返等价类, 有周期  $d = 2$ . 用  $G_1$  表示所有的奇数, 用  $G_2$  表示所有的偶数, 则  $I = G_1 \cup G_2$ . 质点从偶数状态出发, 第 1 步进入  $G_1$ , 第 2 步进入  $G_2$ , 第 3 步进入  $G_3 = G_1$ ,  $\dots$ , 第  $n = md - 1$  步进入  $G_{md-1} = G_1$ , 第  $n = md$  步进入  $G_{md} = G_2$ , 周而复始.

## 定理 2.2

设常返等价类  $C$  有周期  $d > 1$ . 取定  $C$  中的状态  $i$ . 对于  $j \in C$ ,

- (1) 有唯一的  $r \in \{1, 2, \dots, d\}$ , 使得只要  $p_{ij}^{(n)} > 0$ , 则有  $n = kd + r$ ;
- (2) 对于 (1) 中的  $r$ , 存在  $N_j$  使得  $n > N_j$  时,  $p_{ij}^{(nd+r)} > 0$ ;
- (3)  $f_{ij}^* = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(nd+r)} = 1$ .

证明.

因为  $j \leftrightarrow i$ , 所以有  $k$  使得  $p_{ji}^{(k)} > 0$ .

(1) 如果  $n, m$  使得  $p_{ij}^{(n)} p_{ij}^{(m)} > 0$ , 则有

$$p_{ii}^{(n+k)} \geq p_{ij}^{(n)} p_{ji}^{(k)} > 0,$$

$$p_{ii}^{(m+k)} \geq p_{ij}^{(m)} p_{ji}^{(k)} > 0.$$

由周期的定义我们知  $n+k, m+k$  都是周期  $d$  的倍数, 所以  $n-m = (n+k) - (m+k)$  也是  $d$  的倍数. 这说明  $n, m$  被  $d$  除后有相同的余数, 即存在唯一的  $r \in \{1, 2, \dots, d\}$ , 使得

$$n = k_1 d + r, \quad m = k_2 d + r.$$

证明.

(2) 设  $p_{ij}^{(Nd+r)} > 0$ . 则存在  $N_j$  使得当  $m > N_j$  时,  $p_{jj}^{(md)} > 0$ . 当  $n > N + N_j$  时有  $m = (n - N) > N_j$ , 于是有

$$p_{ij}^{(nd+r)} \geq p_{ij}^{(Nd+r)} p_{jj}^{(nd-Nd)} = p_{ij}^{(Nd+r)} p_{jj}^{(md)} > 0.$$

(3) 由于  $f_{ij}^{(n)}$  是质点从  $i$  出发在第  $n$  步首次到达  $j$  的概率, 所以  $f_{ij}^{(n)} \leq p_{ij}^{(n)}$ . 于是只要  $n$  使得  $f_{ij}^{(n)} > 0$  时, 就有  $p_{ij}^{(n)} > 0$ , 从而有  $n = kd + r$ , 我们知

$$f_{ij}^* = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(nd+r)} = 1.$$

□

对于固定的  $i \in C$ , 定理 2.2 的 (1) 说明, 质点从  $i$  出发后, 只可能在  $t = kd + r$  时转移到状态  $j$ ,  $r$  是和  $j$  有关的正整数; 性质 (2) 说明在时间充分长后, 质点可以在任何时刻  $t = nd + r$  到达  $j$ . 现在定义

$$C_r = \{j \mid \sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(nd+r)} > 0\}, \quad r = 1, 2, \dots, d$$

质点从  $i$  出发后, 只能在时刻

$$r, d+r, 2d+r, \dots$$

进入集合  $G_r$ , 于是得到  $d$  个互不相交的  $G_1, G_2, \dots, G_d$ . 质点在这些集合中的转移规律如下, 质点从  $i$  出发后, 第 1 步进入  $G_1$ , 第 2 步进入  $G_2$ ,  $\dots$ , 第  $d$  步进入  $G_d$ . 第  $d+1$  步进入  $G_{d+1} = G_1$ ,  $\dots$ , 依次循环.

### 命题 2.3

对于有周期  $d$  的正常返等价类  $C$  和  $i, j \in C$ , 有唯一的  $r (1 \leq r \leq d)$ , 使得当  $n \rightarrow \infty$  时,

$$\frac{1}{d} \sum_{i=1}^d p_{ij}^{(nd+s)} = \frac{1}{d} p_{ij}^{(nd+r)} \rightarrow \frac{1}{\mu_j}.$$

证明.

根据定理 2.2 (1), 有唯一的  $r \in \{1, 2, \dots, d\}$  使得只要  $p_{ij}^{(n)} > 0$ , 则有  $n = kd + r$ , 所以

$$\frac{1}{d} \sum_{i=1}^d p_{ij}^{(nd+s)} = \frac{1}{d} p_{ij}^{(nd+r)}.$$

当  $f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(nd+r-k)} > 0$  时, 有  $p_{ij}^{(k)} \geq f_{ij}^{(k)} > 0$ , 于是有  $k = ld + r$ . 于是

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(nd+r)} &= \sum_{k=1}^{nd+r} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(nd+r-k)} \\ &= \sum_{l=1}^n f_{ij}^{(ld+r)} p_{jj}^{(nd-l d)} \\ &= \sum_{l=1}^h f_{ij}^{(ld+r)} p_{jj}^{(nd-l d)} + \sum_{l=h+1}^n f_{ij}^{(ld+r)} p_{jj}^{(nd-l d)}. \end{aligned}$$

简单随机游动的常返性

质点在常返等价类中的转移

证明.

当  $n \rightarrow \infty$ , 用  $p_{jj}^{(nd-l d)} \rightarrow d/\mu_j$  得到右边的第一项收敛到

$$\sum_{i=1}^h f_{ij}^{(ld+r)} \frac{d}{\mu_j},$$

第二项的极限不超过  $b_h \equiv \sum_{l=h+1}^{\infty} f_{ij}^{(ld+r)}$ , 即有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(nd+r)} = \frac{d}{\mu_j} \sum_{l=1}^h f_{ij}^{(ld+r)} + O(b_h).$$

令  $h \rightarrow \infty$ , 用  $\sum_{l=1}^{\infty} f_{ij}^{(ld+r)} = 1$  和  $b_h \rightarrow 0$  可得.

□

## 命题 2.4

对于有周期  $d$  的正常返等价类  $C$  和  $i, j \in C$ , 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p_{ij}^{(k)} = \frac{1}{\mu_j}.$$

证明.

由前一命题我们有

$$a_l = \frac{1}{d} \sum_{s=1}^d p_{ij}^{(ld+s)} \rightarrow \frac{1}{\mu_j}, \text{ 当 } l \rightarrow \infty \text{ 时.}$$

于是当  $m \rightarrow \infty$  时, 有

$$\frac{1}{md} \sum_{k=1}^{md} p_{ij}^{(k)} = \frac{1}{d} \frac{1}{m} \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{s=1}^d p_{ij}^{(ld+s)} = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} a_l \rightarrow \frac{1}{\mu_j}.$$

对于任意自然数  $n$ , 存在  $m$  使得  $(m-1)d < n \leq md$ . 再由

$$\frac{1}{(m-1)d} \sum_{k=1}^{md} p_{ij}^{(k)} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p_{ij}^{(k)} \leq \frac{1}{(m-1)d} \sum_{k=1}^{md} p_{ij}^{(k)},$$

让  $n \rightarrow \infty$  从而得证.

