第 21 讲 离散时间分支过程

定义

灭绝概率

考虑由同类生物 (或粒子) 构成的群体，其中的每个生物在寿终时以概率 $P(\xi = j) = p_j$ 分裂成 j 个后代，且与其他生物的分裂情况独立. 其后代也按照相同的方式各自独立分裂自己的后代. 用 X_n 表示第 n 代生物的总数，称随机序列 $\{X_n\}$ 为 离散时间分支过程，也称为 Galton-Watson 分支过程.

现在用 ξ_{nk} 表示第 n 代的第 k 个个体寿终时分裂成的后代数，则 $\{\xi_{nk}\}$ 是来自总体 ξ 的随机变量. 对 $m = 1, 2, \cdots$，用 $X_0 = m$ 表示第 0 代有 m 个个体. 在条件 $X_0 = 1$ 下，有

$$
\begin{aligned}
X_1 &= \xi_{01}, \\
X_2 &= \sum_{k=1}^{X_1} \xi_{1k}, \\
&\cdots\cdots \\
X_n &= \sum_{k=1}^{X_{n-1}} \xi_{n-1,k}.
\end{aligned}
$$

用 $\mu = E\xi$ 表示总体 ξ 的数学期望，这是一个个体分裂成的平均后代数. 因为 X_{n-1} 是第 $n-1$ 代生物的个数，由 $\{\xi_{jk}|j \le n-2, k \ge 1\}$ 决定，所以与 $\{\xi_{n-1,k}|k \ge 1\}$ 独立，由瓦尔德定理我们有

$$
\begin{aligned}
EX_n &= E\xi_{n-1,k}EX_{n-1} = \mu EX_{n-1} = \mu^2 EX_{n-2} \\
&= \cdots = \mu^{n-1}EX_1 = \mu^n.
\end{aligned}
$$

当 $X_0 = 1$ 时，还可以计算出

$$\mathrm{Var}(X_n) = \begin{cases} \sigma^2\mu^{n-1}\frac{\mu^n-1}{\mu-1}, & \mu \neq 1, \\ n\sigma^2, & \mu = 1. \end{cases}$$

因为已知 $X_{n-1} = i$ 后，X_n 和 $(X_0, X_1, \cdots, X_{n-2})$ 独立，并且

$$P(X_n = j | X_{n-1} = i) = P(X_1 = j | X_0 = i), \ i, j \geq 0,$$

所以离散时间分支过程是马氏链.

定义

灭绝概率

对于分支过程我们关心的是当 $X_0 = 1$ 时群体灭绝的概率 p_0. 由于群体灭绝的概率 p_0. 由于群体灭绝当且第一代每个个体的后代灭绝，所以有

$$P(\text{群体灭绝}|X_1 = j) = \rho_0^j,\ j = 0, 1, \cdots .$$

于是在条件 $X_0 = 1$ 下，容易计算

$$\begin{aligned}\rho_0 &= P(\text{群体灭绝}) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} P(\text{群体灭绝}|X_1 = j)p_j = \sum_{j=0}^{\infty} \rho_0^j p_j.\end{aligned} \tag{2.1}$$

定义

$$g(s) = \sum_{j=0}^{\infty} s^j p_j - s,$$

(2.1) 说明灭绝概率 ρ_0 是 $g(s) = 0$ 的解.

定理 2.1

设 $p_0 > 0$，$p_0 + p_1 < 1$. 若 $X_0 = 1$，则

(1) ρ_0 是 $g(s) = 0$ $(s \in [0,1])$ 的最小解;

(2) $\rho_0 = 1$ 的充分必要条件是 $\mu = E\xi \leq 1$.

证明.

(1) 我们只需证明如果 $\rho > 0$ 使得 $g(\rho) = 0$，则 $\rho \geq \rho_0$.

我们首先由归纳法证明对于 $n \geq 1$，$\rho \geq P(X_n = 0)$. 首先我们有

$$\rho = \sum_{j=0}^{\infty} p_j \rho^j = p_0 \rho^0 = P(X_1 = 0).$$

于是结论对 $n = 1$ 成立. 设 $\rho \geq P(X_{n-1} = 0)$，注意到 $X_0 = 1$，利用 $P(X_n = 0|X_1 = j) = [P(X_{n-1} = 0)]^j$，我们有

$$\rho = \sum_{j=0}^{\infty} p_j \rho^j \geq \sum_{j=0}^{\infty} p_j [P(X_{n-1} = 0)]^j = \sum_{j=0}^{\infty} P(X_1 = j) P(X_n = 0|X_1 = j) = P(X_n = 0).$$

这就得到 $\rho \geq P(X_n = 0)$. 对于 $n \geq 1$，$A_n = \{X_n = 0\}$ 是单调增加的，所以有

$$\rho_0 = P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \to \infty} P(A_n) \leq \rho.$$

这说明 ρ_0 是最小解. 因为 $g(0) = p_0 > 0$，所以 $\rho_0 \in (0, 1]$.

证明.

(2) 函数 $g(s)$ 在 $(0,1]$ 中连续，且

$$g'(s)=\sum_{j=0}^{\infty} js^{j-1}p_j-1,\ g'(1)=\mu-1.$$

如果 $\mu\le 1$，对于 $s\in[0,1)$，我们有

$$g'(s)<g'(1)=\mu-1\le 0,$$

所以 $g(s)$ 是 $[0,1)$ 中的严格单调减函数. 由 $g(1)=0$ 知道 $\rho_0=1$ 是 $g(s)$ 在 $(0,1]$ 中的唯一零点，所以 $\rho_0=1$. 当 $\mu>1$ 时，我们证明 $\rho_0<1$. $g'(1)=\mu-1>0$ 说明 $g(s)$ 在 1 附近严格单调升. 又从

$$g''(s)=\sum_{j=2}^{\infty} j(j-1)s^{j-2}p_j>0$$

知道 $g(s)$ 是严格的凸函数，于是再从 $g(0)=p_0>0$，$g(1)=0$ 知道 $g(s)=0$ 在开区间 $(0,1)$ 中有唯一解 p_0. $\square$

命题 2.2

设 ρ_0 是 $X_0 = 1$ 时分支过程 $\{X_n\}$ 的灭绝概率. 当 $p_0 > 0$，$p_0 + p_1 < 1$ 时，有

$$P(\lim_{n\to\infty} X_n = 0) = \rho_0, \quad P(\lim_{n\to\infty} X_n = \infty) = 1 - \rho_0.$$

证明.

第一个等式就是灭绝概率的定义，自然成立. 0 是吸引状态. 对于 $i \geq 1$，由

$$p_{i0} = (P(\xi = 0))^i = p_0^i > 0,$$

我们知质点从 i 出发以正概率不回到 i，说明 i 不是常返的. 于是 $C = \{1, 2, \cdots, m\}$ 中的状态都是非常返的. 这说明马氏链最多访问 C_m 有限次，最终离开 C_m. 定义 $W = \liminf_{n \to \infty} X_n$，就有

$$P(W = 0) = \rho_0,$$

$$P(W \in C_m) = 0,$$

$$P(W \geq m) = 1 - P(W \in C_m) - P(W = 0) = 1 - \rho_0.$$

事件列 $B_m = \{W \geq m\}$ 单调减，用概率的连续性得到

$$P(W = \infty) = P\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} \{W \geq m\}\right) = \lim_{m \to \infty} P(W \geq m) = 1 - \rho_0. \qquad \square$$

当生物的最初群体数 $X_0 = m$ 时，由于个体独立地分裂自己的后代，所以群体的平均增长速度为 $E[X_n|X_0 = m] = m\mu^n$，方差为

$$\mathrm{Var}(X_n|X_0 = m) = \begin{cases} m\sigma^2\mu^{n-1}\frac{\mu^n-1}{\mu-1}, & \mu \neq 1, \\ mn\sigma^2, & \mu = 1. \end{cases}$$

群体最终灭绝的概率为 ρ_0^m，群体数走向无穷的概率为 $1 - \rho_0^m$. 群体的初始数 m 越大，最终灭绝的概率越小. 当 $\mu > 1$，方差 $\mathrm{Var}(X_n)$ 的指数增加说明每个个体的后代数发展得很快.