第 23 讲 连续时间马氏链

设 I 是状态空间，$\{X(t)\} = \{X(t)|t \geq 0\}$ 是以 I 为状态空间的连续时间随机过程.

定义 1.1

如果对任何正整数 n, $t_0 < t_1 < \cdots < \cdots < t_{n+1}$ 和 $i, j, i_0, i_1, \cdots, i_{n-1} \in I$，有

$$P(X(t_{n+1}) = j|X(t_n) = i, X(t_{n-1}) = i_{n-1}, \cdots, X(t_0) = i_0) = P(X(t_{n+1}) = j|X(t_n) = i),$$

则称 $\{X(t)\}$ 是连续时间离散状态的马氏链，简称为连续时间马氏链.

上面定义中的 “链” 表明状态空间 I 是离散的. 和离散时间马氏链的情况相同，我们称具有性质

$$P(X(t+s)=j|X(s)=i)=P(X(t)=j|X(0)=i),\ \ s,t\geq 0$$

的马氏链为时齐马氏链. 时齐性表明转移概率

$$p_{ij}(t)=P(X(t+s)=j|X(s)=i) \tag{1.1}$$

与起始时间 s 无关.
无特别说明时。以后的马氏链都是时齐马氏链，并且简称为马氏链.

(1) $p_{ij}(0)$ 是 δ 函数:

$$p_{ij}(0) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \in I, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

(2) 对于 $t > 0$，已知 $X(t) = i$ 的条件下，将来 $\{X(u)|u > t\}$ 与过去 $\{X(v)|0 \leq v < t\}$ 独立.

(3) K-C 方程：对任意 $t, s \geq 0$，有

$$p_{ij}(s+t) = \sum_{k \in I} p_{ik}(t) p_{kj}(s) \text{ 或} P(t+s) = P(t)P(s),$$

其中

$$P(t) = (p_{ij}(t))_{i,j \in I}$$

称为马氏链 $\{X(t)\}$ 的转移概率矩阵.

推论 1.2

对于转移概率矩阵 $P(t)$ 和 $\epsilon > 0$，我们有 $\{P(t) : t \in (0, \epsilon]\}$ 可以决定所有的 $P(t)$.

证明.

对任意 $t > 0$，存在 $n \in \mathbb{N}$，使得 $t/n \in (0, \epsilon]$，而 $P(t) = P(t/n)^n$. $\square$

(4) 马氏链的有限维分布由转移概率 (1.1) 和初始分布

$$p_i = P(X(0) = i),\ i \in I$$

唯一决定，且对 $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$，有

$$\begin{aligned} &P(X(t_1) = i_1, X(t_2) = i_2, \cdots, X(t_n) = i_n | X(0) = i) \\ =&p_{ii_1}(t_1) p_{i_1 i_2}(t_2 - t_1) \cdots p_{i_{n-1} i_n}(t_n - t_{n-1}). \end{aligned}$$

特别当 $t_{j+1} - t_j = a$ 时，有

$$P(X(a) = i, X(2a) = i, \cdots, X(na) = i | X(0) = i) = [p_{ii}(a)]^n.$$

(5) $X(t)$ 的概率分布由转移概率矩阵和 $X(0)$ 的概率分布

$$\boldsymbol{p}(0) = [p_1(0), p_2(0), \cdots]$$

唯一决定，

$$\boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{p}(0) P(t),$$

其中 $\boldsymbol{p}(t) = [p_1(t), p_2(t), \cdots]$, $t \geq 0$, $p_i(t) = P(X(t) = i)$, $i \in I$.

(6) 对于 $s, t \geq 0$，有

$$p_{jj}(s+t) \geq p_{jj}(s) p_{jj}(t),\ p_{jj}(t) \geq [p_{jj}(\frac{t}{n})]^n.$$

定义

泊松过程是马氏链

泊松过程具有独立增量性和平稳增量性，状态空间 $I=\{0,1,\cdots\}$. 设 λ 是泊松过程 $\{N(t)\}$ 的强度，$t_0<t_1<\cdots<t_{n+1}$，利用独立增量性和平稳增量性得到

$$\begin{aligned}
&P(N(t_{n+1})=j|N(t_n)=i,N(t_{n-1})=i_{n-1},\cdots,N(t_0)=i_0)\\
=&P(N(t_{n+1})-N(t_n)=j-i|N(t_n)=i,\cdots,N(t_0)=i_0)\\
=&P(N(t_{n+1})-N(t_n)=j-i)=P(N(t_{n+1}-t_n)=j-i).
\end{aligned}$$

上式只与 $i,j,t_{n+1}-t_n$ 有关，于是知道 $\{N(t)\}$ 是马氏链，有初始分布 $P(N(0)=0)=1$ 和转移概率

$$p_{ij}(t)=P(N(t)=j-i)=\begin{cases}\dfrac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}e^{-\lambda t} & \text{当 } j\geq i,\\ 0, & \text{当 } j<i,\end{cases}$$

其中

$$p_{ij}(0)=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j,\\ 0 & i\neq j.\end{cases}$$

从上面的推到可以看出，取整数值的有独立增量性的平稳增量过程是马氏链.

容易看出 $p_{ij}(t)$ 是连续函数，在 $t=0$ 处有右导数

$$q_{ij} \equiv p'_{ij}(0) = \begin{cases} -\lambda, & j=i, \\ \lambda, & j=i+1, \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$$

由于泊松过程在 i 的停留时间服从指数分布 $\mathcal{E}(\lambda)$，所以其数学期望 λ^{-1} 是质点在 i 的平均停留时间. λ 越大，泊松过程由 i 向 $i+1$ 转移得越快. 于是称 λ 为 i 的转移速率和转移强度. 这样 $p'_{i,i+1}(0) = q_{i,i+1} = \lambda$ 表明质点从 i 出发，下一步向 $i+1$ 转移的速率是 λ. 对于 $j \neq i$ 和 $i+1$，$p'_{ij}(0) = q_{ij} = 0$ 表明质点从 i 出发，下一步向 j 转移的速率是 0，也就是说不会由 i 转向 j. 称 $p'_{ii}(0) = -\lambda$ 为质点停留在 i 的速率.

引入矩阵

$$Q = (q_{ij})_{i,j\in I} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

人们称 Q 为泊松过程 $\{N(t)\}$ 的转移速率矩阵 或 转移强度矩阵，或简单地称为 Q 矩阵. 可以把转移速率矩阵写成若当矩阵的形式

$$Q = (-\lambda)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

用归纳法容易验证

$$Q^k = (-\lambda)^k \begin{pmatrix} C_k^0 & C_k^1(-1)^1 & C_k^2(-1)^2 & C_k^3(-1)^3 & \cdots \\ 0 & C_k^0 & C_k^1(-1)^1 & C_k^2(-1)^2 & \cdots \\ 0 & 0 & C_k^0 & C_k^1(-1)^1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix},$$

其中对于 $j<0$ 或 $j>k$，规定 $C_k^j=0$. 定义

$$q_{ij}^{(k)} = (-\lambda)^k C_k^{j-i}(-1)^{i-j},\ k \geq 1,\ i,j \in I,$$

利用 $p_{ij}(0)=\delta_{ij}$，我们有

$$Q^k=(q_{ij}^{(k)}),\ Q^0=\text{单位矩阵},$$

并且对于 $j\geq i$，有

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}q_{ij}^{(k)}&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\lambda^{j-i}C_k^{j-i}(-\lambda)^{k+i-j}\\&=\sum_{k=j-i}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)![k-(j-i)]!}(-\lambda t)^{k-(j-i)}\\&=\frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}e^{-\lambda t}\\&=p_{ij}(t).\end{aligned}$$

写成矩阵的形式就得到

$$P(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}(q_{ij}^{(k)})=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(tQ)^k.$$

形式上也可以把上式写成指数函数

$$P(t)=e^{tQ}.$$

注意对上面两式求导数我们就得到 $P'(0)=Q$.