

第 11 次作业

截止日期：5 月 26 日

习题 1. P166 练习 4.4 (4).

证明. (a) 注意到 $i \rightarrow 1$, 以及 $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow \cdots \rightarrow i-1 \rightarrow i$, 所以所有状态互通, 该马氏链不可约. 从 1 出发转移 n 次首次回到 1, 只有一种路径 $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow \cdots \rightarrow n-1 \rightarrow 1$, 从而 $f_{11}^{(n)} = (\frac{1}{2})^n$.

(b) 由 $\mu_1 = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{11}^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} n (\frac{1}{2})^n < \infty$ 我们知 1 是正常返的, 且由 $p_{11}^{(1)} = \frac{1}{2}$ 知 1 是非周期的, 于是 1 是遍历状态, 再由该马氏链不可约我们知其为遍历马氏链.

□

习题 2. P173 练习 4.5 (3).

解. 用 X_n 表示第 n 天的定价, 用 A_n 表示第 n 天销量好. 利用

$$\begin{aligned} p_{ij} &= P(X_{n+1} = j | X_n = i) \\ &= P(A_n | X_n = i) P(X_{n+1} = j | X_n = i, A_n) + P(\overline{A_n} | X_n = i) P(X_{n+1} = j | X_n = i, \overline{A_n}). \end{aligned}$$

可以得出 $p_{i1} = p_i/3 + q_i = 1 - 2p_i/3$, $p_{i2} = p_i/3$, $p_{i3} = p_i/3$. 于是一步转移概率矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.6 & 0.2 & 0.2 \\ 0.8 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix}.$$

我们需要求平均使用率, 即要求不变分布. 解方程组 $(\pi_1, \pi_2, \pi_3)P = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$, $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$, 我们可得

$$(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = \left(\frac{7}{13}, \frac{3}{13}, \frac{3}{13}\right) = (0.5385, 0.2308, 0.2308).$$

□

习题 3. P199 习题 4.5.

解. (1) $P = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-b & b \end{pmatrix}.$

(2) 解方程组 $\pi P = \pi$, $\pi_0 + \pi_1$ 可以得到不变分布 $\pi = (\pi_0, \pi_1) = (\frac{1-b}{2-b-a}, \frac{1-a}{2-b-a})$.

(3) π_0 .

□

习题 4. P201 习题 4.15.

解. (a) 注意到所有状态互通, 所以该马氏链不可约. 注意 $p_{22}^{(1)} > 0$ 于是 2 是非周期的, 从而由不可约性该马氏链非周期. 注意状态空间有限, 由不可约性知所有状态正常返. 所以该马氏链是遍历马氏链.

$$(b) [3/8, 1/4, 3/8], \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

□