

第 12 次作业

截止日期：6 月 9 日

习题 1. P200 习题 4.10.

解. 见课本 P307 答案. □

习题 2. P202 习题 4.17.

解. 见课本 P307 答案. □

习题 3. P202 习题 4.18.

解. 见课本 P307 答案. □

习题 4. P202 习题 4.19.

解. 令状态为陈教授身边的雨伞数, 则定义的马氏链有 $r+1$ 个状态, 且转移概率为

$$p_{0,r} = 1, p_{i,r-i} = 1-p, P_{i,r-i+1} = p, i = 1, \dots, r.$$

求不变分布

$$\begin{cases} \pi_r = \pi_0 + \pi_1 p, \\ \pi_j = \pi_{r-j}(1-p) + \pi_{r-j+1} p \quad 1 \leq j \leq r \\ \pi_0 = \pi_r(1-p), \\ \pi_0 + \pi_1 + \dots + \pi_r = 1. \end{cases}$$

可解得:

$$\pi_i = \begin{cases} \frac{q}{r+q} & i = 0, \\ \frac{1}{r+q} & i = 1, \dots, r, \end{cases}$$

其中 $q = 1-p$. 于是这个马尔可夫链是遍历的. 于是我们知被雨淋的概率为 $g(p) = p\pi_0 = \frac{pq}{r+q}$. 特别地当 $r = 3$ 时 $g(p) = \frac{p-p^2}{4-p}$. 求最大值可得当 $p = 4 - 2\sqrt{3} \approx 0.5359$ 时被淋雨的概率最大.

注: 这里算出来的是上午/下午被淋雨的概率. 如果按 X_n 定义为早上家里的伞的数量, 算出来的概率是上面概率的是一天被雨淋的概率 = 上午雨淋的概率 + 下午雨淋的概率. □

习题 5. P203 习题 4.22.

解. 用 ξ_n 和 η_n 表示时刻 n 时蜘蛛和蝇的位置, $X_n = (\xi_n, \eta_n)$ ($n = 0, 1, \dots$) 是马氏链, 3 个状态分别是 $a = (0, 1)$, $b = (1, 0)$, $c = (0, 0) \cup (1, 1)$. c 是吸引状态, a, b 是非常返状态.

$$P = \begin{pmatrix} pp' & qq' & pq' + qp' \\ qq' & pq' & pq' + qp' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

若第 n 步回到初始状态, 马氏链 $\{X_n\}$ 只能在 a, b 之间转移, 从 a 到 b 的转移步数等于从 b 到 a 的转移步数, 于是有

$$p_{aa}^{(n)} = \sum_{k=0}^{[n/2]} C_n^{2k} (qq')^{2k} (pp')^{n-2k} = \frac{1}{2} [(pp' + qq')^n + (pp' - qq')^n].$$

由状态 a, b 的对称性得到 $p_{bb}^{(n)} = p_{aa}^{(n)}$, 同理得到 $p_{ba}^{(n)} = p_{ab}^{(n)}$,

$$p_{ab}^{(n)} = \sum_{k=0}^{[n/2]} C_n^{2k+1} (qq')^{2k+1} (pp')^{n-2k-1} = \frac{1}{2} [(pp' + qq')^n - (pp' - qq')^n].$$

设 $\tau = \min\{n | X_n = c\}$, 则 $P(\tau = n | X_0 = a) = f_{ac}^{(n)} = p_{aa}^{(n-1)} p_{ac} + p_{ab}^{(n-1)} p_{bc}$. 于是得到平均捕食时间为

$$E[\tau | X_0 = a] = \sum_{n=0}^{\infty} n f_{ac}^{(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} n (pp' + qq')^{n-1} p_{ac} = 1/(pq' + qp'). \quad \square$$

习题 6. P257 习题 5.2.

证明. (1) 由 K-C 方程我们有

$$\begin{aligned} p_{jj}(t+s) &= \sum_{i \neq j} p_{ji}(t) p_{ij}(s) + p_{jj}(t) p_{jj}(s) \\ &\leq \sum_{i \neq j} p_{ji}(t) + p_{jj}(s) p_{jj}(t) \\ &\leq 1 - p_{jj}(t) + p_{jj}(s) p_{jj}(t). \end{aligned}$$

(2) 对于 $t > s$, 首先我们有

$$\begin{aligned} p_{jj}(t) - p_{jj}(s) &\geq p_{jj}(t-s) p_{jj}(s) - p_{jj}(s) \\ &= -p_{jj}(s) (1 - p_{jj}(t-s)) \\ &\geq -(1 - p_{jj}(t-s)). \end{aligned}$$

另一方面, 由 (1) 我们有

$$\begin{aligned} p_{jj}(t) - p_{jj}(s) &\leq 1 - p_{jj}(t-s) + p_{jj}(t-s) p_{jj}(s) - p_{jj}(s) \\ &\leq 1 - p_{jj}(t-s). \end{aligned}$$

综上所述 $|p_{jj}(t) - p_{jj}(s)| \leq 1 - p_{jj}(t-s)$. $\square$