

第 14 次作业

截止日期：无

习题 1. P258 习题 5.7

解. 用 $X(t)$ 表示诊室的总人数, 则 $X(t) = 0$ 或 1 . 用 S 表示 $X(t) = 0$ 时等待新到一个人所需的时间, 用 T 表示 $X(t) = 1$ 时离开一人所需的时间, 则 S, T 独立且 $S \sim \mathcal{E}(\lambda), T \sim \mathcal{E}(\mu)$. 于是我们知 $q_{00} = -\lambda, q_{11} = -\mu$. 于是转移速率矩阵为

$$\begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}$$

于是平稳分布 (p_0, p_1) 满足方程组

$$\begin{cases} -\lambda p_0 + \mu p_1 = 0 \\ \lambda p_0 - \mu p_1 = 0 \\ p_0 + p_1 = 1 \end{cases}$$

于是 $p_0 = \mu/(\lambda + \mu), p_1 = \lambda/(\lambda + \mu)$.

(a) 诊室的平均人数为 $0p_0 + 1p_1 = \lambda/(\lambda + \mu)$.

(b) 医生的可用度为 $1 - p_0 = \lambda/(\lambda + \mu)$.

(c) 能看病人数占到达人数的比例为 $E[S]/E[S + T] = \frac{1/\lambda}{1/\mu + 1/\lambda} = \mu/(\lambda + \mu)$.

□

习题 2. P259 习题 5.13

证明. 课本答案有误.

当 $\lambda < \mu$ 时, 生灭过程为正常返. 其平稳分布为

$$p_0 = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)^{a/\lambda},$$
$$p_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{a}{\lambda} + 1\right) \cdots \left(\frac{a}{\lambda} + n - 1\right) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)^{a/\lambda}, \quad n \geq 1.$$

□

习题 3. P259 习题 5.19.

习题 4. P260 习题 5.22.

解. 课本答案有无, 正确答案为

$$\frac{1}{1 + \frac{m\lambda}{\mu} + \cdots + \frac{m!\lambda^m}{\mu^m}}.$$

□